数学演習第一　演習第 8 回 【解答例】

線形：正則行列，逆行列，2 次または 3 次の行列式　(2023 年 6 月 28 日 実施)

1　演習問題

1　$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\widetilde{A}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ とする．

(1) $|A|=ad-bc$　　(2) $A\widetilde{A}=(ad-bc)E_2$

(3) $|A|=ad-bc\neq 0$ なので，$C=(ad-bc)^{-1}\widetilde{A}$ とおけば，(2) より $AC=E_2$ となる．よって，III より A は正則であり $A^{-1}=C$.

(4) $|AB|=\begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix}=(ae+bg)(cf+dh)-(af+bh)(ce+dg)$
$=(acef+adeh+bcfg+bdgh)-(acef+adfg+bceh+bdgh)$
$=ad(eh-fg)+bc(fg-eh)=(ad-bc)(eh-fg)=|A||B|$.

(5) $|A|\neq 0$ ならば A は正則であることは (3) で示したので，その逆を示す．A が正則のとき I より，$AD=E_2$ となる行列 D が存在する．両辺の行列式を取って，左辺に対して (4) を用いれば，$|A||D|=|E_2|=1$ となる．$|A|=0$ とすれば $|A||D|=1$ に矛盾するので，$|A|\neq 0$ が成り立つ．

2　(1) $\begin{vmatrix} \cosh t & r\sinh t \\ \sinh t & r\cosh t \end{vmatrix}=r$ なので IV より $r\neq 0$ のとき正則.

$r\neq 0$ のとき，IV より逆行列は $\dfrac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cosh t & -r\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\frac{\sinh t}{r} & \frac{\cosh t}{r} \end{bmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 6 & \lambda+3 \end{vmatrix}=(\lambda+5)(\lambda-3)$ なので IV より $\lambda\neq -5,3$ のとき正則.

$\lambda\neq -5,3$ のとき，IV より逆行列は $\dfrac{1}{(\lambda+5)(\lambda-3)}\begin{bmatrix} \lambda+3 & -2 \\ -6 & \lambda-1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を行基本変形により簡約行列に変形すると

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-2\times①]{②-3\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}\times②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+3\times②]{①-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$ となる.

よって，V より正則でない.

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を行基本変形により簡約行列に変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-3\times①]{②+4\times①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[②\leftrightarrow③]{-1\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[②+2\times③]{①+③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$ となる.

よって，V より正則であり，逆行列は $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(5) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を行基本変形により簡約行列に変形すると

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[④-①,\ -1\times②]{③-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1\times③]{④-②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[④+③]{①-③,\ ②+③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{②-2\times④} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．よって，V より正則であり逆行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3 (1) $\lambda = 2$, $A = E_2$ とすれば，$|\lambda A| = 4$ だが $\lambda|A| = 2$ となる．よって，成り立たない．

(2) $\boxed{1}$ (4) より $|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$ が成り立つ．

(3) $A = B = E_2$ とすれば，$|A + B| = 4$, $|A| + |B| = 2$ となる．よって，成り立たない．

(4) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とすると，$|{}^tA| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |A|$ が成り立つ．

(5) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とすると，$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ であり，

$$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & \frac{-a_{12}}{|A|} \\ \frac{-a_{21}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|^2} \cdot (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}) = \frac{1}{|A|^2} \cdot |A| = |A|^{-1}$$

が成り立つ．

4 (1) $[A \quad B]$ を行基本変形により簡約行列に変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{②-①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[③+2\times②]{①-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1\times③]{①+③,\ ②+③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$ となる．

よって，$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & -15 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$.

(2) 両辺の転置をとり，B は交代行列 (${}^tB = -B$) であることに注意すると，${}^tA\,{}^tY = -B$ となる．

(1) と同様にして，${}^tY = \begin{bmatrix} 7 & -5 & -11 \\ -7 & 6 & 9 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ を得る．よって，$Y = \begin{bmatrix} 7 & -7 & -3 \\ -5 & 6 & 4 \\ -11 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ となる．

5 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18.$　(2) $\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1).$

(3) $\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$

6 (1) 直交行列であることは計算して ${}^tPP = E_2$ を示せばよい．逆行列は $P^{-1} = {}^tP = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$

(2) 直交行列であることは計算して ${}^tQQ = E_3$ を示せばよい．逆行列は

$$Q^{-1} = {}^tQ = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r\sin\theta \end{bmatrix}$ とおくと $R = QD$ となり，仮定 $r\sin\theta \neq 0$ により $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r\sin\theta} \end{bmatrix}.$

よって，${}^tR = {}^tD\,{}^tQ = DQ^{-1}$ であり，

$$\begin{aligned}({}^tR)^{-1} = QD^{-1} &= \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r\sin\theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} \\ \sin\theta\sin\varphi & \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} \\ \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

7 (1) $|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7$ より, $S = |-7| = 7.$　(2) $T = \dfrac{S}{2} = \dfrac{7}{2}.$

(3) $|\boldsymbol{p}\ \ \boldsymbol{q}\ \ \boldsymbol{r}| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -24$ より, $V = |-24| = 24.$　(4) $W = \dfrac{V}{6} = 4.$

2　レポート問題

1 (1) $|A| = a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1 > 0$ なので，任意の実数 a に対して A は正則で，
逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{a^2-2a+1}\begin{bmatrix} a-2 & 2 \\ -1 & a \end{bmatrix}.$

(2) $[B\ \ E_3]$ に行基本変形を施すと

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2a & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-2\times①]{②-3\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -a & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[②\leftrightarrow③]{-1\times②,-1\times③} \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[③-②]{①-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{①-③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．よって，$a = 0$ のとき，行基本変形をさらに行って得られる $[B, E_3]$ の簡約行列の左半分 (すなわち B の簡約行列) が E_3 にならないことがわかり，B は正則でない．$a \neq 0$ のときは

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a}\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$ より正則で, $B^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}.$

2 $|\boldsymbol{p}\ \ \boldsymbol{q}\ \ \boldsymbol{r}| = \begin{vmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -9$ より, $V = \dfrac{|-9|}{6} = \dfrac{3}{2}.$