数学演習第一（演習 第9回）
微積：漸近展開, 積分の計算 (1)

2023 年 7 月 5 日

ランダウの記号 (微積教科書 p.49 参照)

関数 $f(x)$ が $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} = 0$ を満たすとき, $f(x) = o(x^n)\ (x \to 0)$ と表す. $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$x^m o(x^n) = o(x^{m+n}),\quad o(x^m)o(x^n) = o(x^{m+n}),\quad o(x^{m+n}) = x^m o(x^n),$$
$$m \leqslant n \text{ なら } o(x^m) + o(x^n) = o(x^m) \quad (x \to 0)$$

が成り立つ (微積教科書 p.50 定理 2.4.4 参照). 但し, ランダウの記号を含む等式は「左辺を右辺で評価する評価式」であることに注意. 例えば, $o(x^m)o(x^n) = o(x^{m+n})\ (x \to 0)$ は次を意味する:

$$f(x) = o(x^m),\ \ g(x) = o(x^n)\ \ (x \to 0) \quad \Rightarrow \quad f(x)g(x) = o(x^{n+m})\ \ (x \to 0).$$

漸近展開の要点

◎空欄の中に適当な数式を記入し, 今回の演習で必要となる予備知識を確認せよ.

$x = 0$ の周りで定義された関数 $f(x)$ がランダウの記号を用いて,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N + o(x^N) \qquad (x \to 0)$$

の形に表されるとき, この右辺を $f(x)$ の $x \to 0$ における N 次の漸近展開という. このとき, 右辺の係数 $a_0, a_1, \ldots, a_N$ は一意に定まり, $f(x)$ が C^N 級ならば $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\ (n = 0, 1, \ldots, N)$ で与えられる (微積教科書 定理 2.4.5). 以下に挙げる $x \to 0$ における漸近展開は最も基本的かつ重要な例である.

(a) $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{N} \boxed{}\, x^n + o(x^N).$

(b) $\displaystyle \cos x = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \boxed{}\, x^{2n} + o(x^N), \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \boxed{}\, x^{2n+1} + o(x^N).$

記号 $\lfloor a \rfloor$ は a 以下の最大整数を表す (例えば, 自然数 N に対し $N_1 = \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$ は $2N_1 + 1 \leqslant N$ を満たす最大整数).
一般に, 偶関数なら奇数次の項が消え, 奇関数なら偶数次の項が消える.

(c) $\displaystyle \log(1+x) = \sum_{n=1}^{N} \boxed{}\, x^n + o(x^N).$

(d) $\displaystyle (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{N} \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^N)$. 但し, $\displaystyle \binom{\alpha}{0} = 1,\ \binom{\alpha}{n} = \boxed{}\ \ (n = 1, 2, \ldots).$

特に, $\displaystyle \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{N} \boxed{}\, x^n + o(x^N)$ (微積教科書 p.46 問題 2.3 1 (3), p.151 例題 6.2.1 参照).

(a)〜(d) の関数を用いて表現される関数であっても, より複雑な関数 $f(x)$ に対しては, 一般に $f^{(n)}(0)$ **を直接計算するのは手が掛かる**. しかし, $f^{(n)}(0)$ を直接計算しなくても, **(a)〜(d) の漸近展開を組み合わせる**ことで $x \to 0$ における漸近展開が得られることがよくある (次の $\boxed{\text{例題}}$ 参照).

例題 上記の漸近展開を利用して, $x\to 0$ における $\dfrac{1}{\cos x}$, $\tan x$, $\log(\cos x)$ の 5 次の漸近展開を求めよ.

[解] まず, (b) より $\cos x = 1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4+o(x^5)$, $\sin x = x-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{120}x^5+o(x^5)$.

- $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{1+(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5))}$ と $\dfrac{1}{1+X} = 1-X+X^2+o(X^2)$ $(X\to 0)$ から,

$$\frac{1}{\cos x} = 1-\Big(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)\Big)+\Big(-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\Big)^2+o(x^5) = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^5).$$

《別法》$\dfrac{1}{\cos x} = a_0+a_2x^2+a_4x^4+o(x^5)$ の形に漸近展開される (偶関数). $1=\cos x\cdot\dfrac{1}{\cos x}$ より,

$$1=\Big(a_0+a_2x^2+a_4x^4+o(x^5)\Big)\Big(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)\Big) = a_0+\Big(a_2-\frac{a_0}{2}\Big)x^2+\Big(a_4-\frac{a_2}{2}+\frac{a_0}{24}\Big)x^4+o(x^5).$$

係数を比較して, $a_0=1$, $a_2=\dfrac{1}{2}$, $a_4=\dfrac{5}{24}$.

- $\tan x = \dfrac{1}{\cos x}\cdot\sin x = \Big(1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{24}x^4+o(x^5)\Big)\Big(x-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{120}x^5+o(x^5)\Big) = x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+o(x^5)$.

《別法》 $\tan x = a_1x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5)$ の形に漸近展開される (奇関数). $\sin x=\tan x\cos x$ より,

$$\begin{aligned} x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5) &= \Big(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5)\Big)\Big(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)\Big)\\ &= a_1x+\Big(a_3-\frac{a_1}{2}\Big)x^3+\Big(a_5-\frac{a_3}{2}+\frac{a_1}{24}\Big)x^5+o(x^5). \end{aligned}$$

係数を比較して, $a_1=1$, $a_3=\dfrac{1}{3}$, $a_5=\dfrac{2}{15}$.

- $\log(\cos x) = \log\Big(1+\Big(-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{24}x^4+o(x^5)\Big)\Big)$ と $\log(1+X) = X-\dfrac{1}{2}X^2+o(X^2)$ $(X\to 0)$ から,

$$\log(\cos x) = \Big(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)\Big)-\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\Big)^2+o(x^5) = -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+o(x^5).$$

《別法》$\tan x = x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^4)$ より, $\displaystyle\int_0^x o(t^4)\,dt = o(x^5)$ に注意して,

$$\log(\cos x) = -\int_0^x \tan t\,dt = -\int_0^x\Big(t+\frac{1}{3}t^3+o(t^4)\Big)dt = -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+o(x^5).$$

1 演習問題

1 **(漸近展開)**

次の関数 $f(x)$ の $x=0$ における漸近展開 $f(x)=\sum_{n=0}^{N}a_nx^n+o(x^N)$ $(x\to 0)$ を指定された次数 N まで求めよ. ただし, $\displaystyle\int_0^x o(t^n)\,dt = o(x^{n+1})$ $(x\to 0)$ を用いてよい.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ $(N=2)$ (2) $\sqrt{1+x}$ $(N=2)$ (3) $\cosh x, \sinh x$ $(N=5)$ (4) 2^x $(N=2)$

(5) $\log(3+x)$ $(N=2)$ (6) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$ $(N=3)$ (7) $\Big(\dfrac{\sin x}{x}\Big)^2$ $(N=4)$

(8) $e^{-x}\cos x$ $(N=3)$ (9) $\dfrac{x}{\sin x}$ $(N=4)$ (10) $e^{\cos x}$ $(N=4)$

(11) $\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $\Big(=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}\Big)$ $(N=5)$ (12) $\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ $\Big(=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}\Big)$ $(N=5)$

(13) $\log(x+\sqrt{1+x^2}\,)$ $\Big(=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\Big)$ $(N=5)$ (14) $\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ $\Big(=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\Big)$ $(N=5)$

【注意】 (11) は $\frac{1}{2}(\log(1+x)-\log(1-x))$ と変形して漸近展開を求めるのが普通のやり方. (9), (10) 以外は a_n が n の式で表されるので, 余力のある人は挑戦してみるとよい ((1), (2), (13), (14) では 2 重階乗が現れる). なお, 偶関数なら $2N$ 次, 奇関数なら $2N+1$ 次の漸近展開の形で考えるのが自然.

2 （漸近展開の応用）

(1) 漸近展開を利用して次の極限値を求めよ.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\sinh^2 x}\right)$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-x}\sin x-\log(1+2x)}{x(e^{-x^2}-1)}$ (iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(2) $\displaystyle\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の $n\to\infty$ における漸近展開 $\displaystyle\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ を求めよ.

(**ヒント**: $\frac{1}{n}=x$ とおき, $(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\log(1+x)}{x}}=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}$ の $x\to 0$ での漸近展開を考えよ.)

3 （高校程度の積分計算の復習）

(1) 次の不定積分・定積分を求めよ.

(i) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$ (ii) $\displaystyle\int x(\log x)^2\,dx$ (iii) $\displaystyle\int x^3e^{-x^2}\,dx$

(iv) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}$ (v) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx$ (vi) $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-x}\sin x\,dx$

(vii) $\displaystyle\int_0^{\pi}|\sqrt{3}\,\sin x-\cos x|\,dx$ (viii) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx$ (m,n は自然数)

(2) $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して, 次の問いに答えよ.

(i) 関数 $\displaystyle F(x)=\int_0^x(x-t)^2f(t)\,dt$ の第 3 次導関数 $F'''(x)$ を求めよ.

(ii) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{\sqrt{x}}^{x^2}f(t)\,dt$ を求めよ.

2 レポート問題（WebClass へ提出）

答だけでなく考え方 (計算過程) も書くこと.

[1] 次の関数 $f(x)$ の $x\to 0$ における漸近展開を 3 次の項まで求めよ. すなわち, $f(x)$ を

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3)\quad(x\to 0)$$

の形に漸近展開せよ.

(i) $\displaystyle f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}}$

(ii) $f(x)=\log(2+x-x^2)$ (**ヒント**: $\log(2+X)=\log(2+X)=\log 2+\log(1+\frac{X}{2})$)

[2] 漸近展開を利用して 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x\sqrt{1-x}}{x(1-\cos x)}$ を求めよ.

[3] 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2x\cos 3x\,dx$ を求めよ. (**ヒント**: 積和の公式)