

数学演習第一 (演習第9回) 【解答例】

微積：漸近展開, 積分の計算 (1) 2023年 7月 5日

要点 (漸近展開の要点)

空欄の中身は並んでいる順に

$$\boxed{\frac{1}{n!}}, \quad \boxed{\frac{(-1)^n}{(2n)!}}, \quad \boxed{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}, \quad \boxed{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}, \quad \boxed{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}}, \quad \boxed{(-1)^n}.$$

1 演習問題

1 (本問でランダウの記号 $o(x^n)$ を使うときはいつも, $x \rightarrow 0$ が省略されている.)

(1) (d) ($\alpha = -\frac{1}{2}$) を用いて, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 + o(x^2) = \boxed{1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)}$.

(2) (d) ($\alpha = \frac{1}{2}$) を用いて, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + o(x^2) = \boxed{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)}$.

(3) (a) より $e^{\pm x} = 1 \pm x + \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \pm \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$ (複号同順) であるから,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \boxed{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \boxed{x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}.$$

【注意】 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + o(x^7)$,

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o(x^7),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7),$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + o(x^7),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7).$$

(4) (a) を用いて, $2^x = (e^{\log 2})^x = e^{(\log 2)x} = \boxed{1 + (\log 2)x + \frac{(\log 2)^2}{2}x^2 + o(x^2)}$.

(5) (c) より, $\log(3+x) = \log 3 + \log\left(1 + \frac{x}{3}\right) = \log 3 + \frac{x}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2 + o(x^2) = \boxed{\log 3 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{18} + o(x^2)}$.

(6) 部分分数分解した後に (d) ($\alpha = -1$) を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x-2x^2} &= \frac{x}{(1-x)(1+2x)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left\{(1+x+x^2+x^3+o(x^3)) - (1-2x+(2x)^2-(2x)^3+o(x^3))\right\} = \boxed{x - x^2 + 3x^3 + o(x^3)}. \end{aligned}$$

《別法》 $\frac{x}{1+x-2x^2} = x \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+2x} = x(1+x+x^2+o(x^2))(1-2x+(2x)^2+o(x^2))$
 $= x - x^2 + 3x^3 + o(x^3).$

(7) (b) より $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$. これを用いて,

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} - \frac{(2x)^6}{720} + o(x^6)\right)\right\} = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + o(x^6).$$

よって, $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{\sin^2 x}{x^2} = \boxed{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o(x^4)}$.

《別法》 $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o(x^4).$

(8) (a), (b) を用いて, $e^{-x} \cos x = \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \boxed{1 - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$.

(9) (b) より $\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1 + (-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4))}$. ここで, $\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + o(X^2)$ ($X \rightarrow 0$) を用いて,

$$\frac{x}{\sin x} = 1 - \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)\right) + \left(-\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right)^2 = \boxed{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o(x^4)}.$$

(10) $\cos x = 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$ ($x \rightarrow 0$), $e^{1+X} = e \cdot e^X = e\left(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right)$ ($X \rightarrow 0$) より,

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e \left\{ 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4) \right\} \\ &= e \left\{ 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} \right\} + o(x^4) = \boxed{e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4)}. \end{aligned}$$

(11) (c) より, $\log(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} + o(x^5)$ (複号同順) であるから,

$$\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \{ \log(1+x) - \log(1-x) \} = \boxed{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}.$$

あるいは積分表示 ($\{\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\}' = \frac{1}{1-x^2}$ を確認せよ) を用いて,

$$\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \int_0^x (1+t^2+t^4+o(t^4)) dt = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

(12) $\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1-t^2+t^4+o(t^4)) dt = \boxed{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}$.

【注意】 $\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \text{Tanh}^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + o(x^7)$, ← $\tanh x$ の逆関数

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7).$$

(13) (1) の結果から, $\frac{1}{\sqrt{1 \pm t^2}} = 1 \mp \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + o(t^4)$ (複号同順). これを用いて,

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{3t^4}{8} + o(t^4)\right) dt = \boxed{x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)}.$$

(14) (13) と同様にして,

$$\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{3t^4}{8} + o(t^4)\right) dt = \boxed{x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)}.$$

【注意】 $\log(x + \sqrt{1+x^2}) = \text{Sinh}^{-1} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + o(x^7)$, ← $\sinh x$ の逆関数

$$\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + o(x^7).$$

2 (1) (i) $x \rightarrow 0$ のとき, $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \sinh^2 x}$ において, 分母は $\sin^2 x \sinh^2 x = (x + o(x))^2(x + o(x))^2 = x^4 + o(x^4)$ となるから, 分子 $\sinh^2 x - \sin^2 x$ に対する 4 次の漸近展開を計算すればよい:

$$\begin{aligned} \sinh^2 x - \sin^2 x &= \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \\ &= \left(x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) = \frac{2}{3}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

$\sinh^2 x - \sin^2 x = (\sinh x + \sin x)(\sinh x - \sin x)$ を用いても上と同じ漸近展開が得られる. よって,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3} + o(1)}{1 + o(1)} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

(ii) 分母は $x(e^{-x^2} - 1) = -x^3 + o(x^3)$ となるから, 分子に対する 3 次の漸近展開を計算すればよい:

$$\begin{aligned} 2e^{-x} \sin x - \log(1+2x) &= 2\left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= 2\left(x - x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\right) = -2x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

よって,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-x} \sin x - \log(1+2x)}{x(e^{-x^2} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^3 + o(x^3)}{-x^3 + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 + o(1)}{-1 + o(1)} = \boxed{2}.$$

(iii) 対数をとって考える. $\log\left(\frac{x}{\tan x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\log \frac{x \cos x}{\sin x}}{x^2}$ において, 分母が x^2 だから, 分子を $o(x^2)$ で表す:

$$\begin{aligned} \log \frac{x \cos x}{\sin x} &= \log \frac{x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \log \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\ &= \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \log\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{3} + o(x^2). \end{aligned}$$

よって, $\lim_{x \rightarrow 0} \log\left(\frac{x}{\tan x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{3} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{3}$ となり, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\tan x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \boxed{e^{-1/3}}$. もちろん, $\tan x$ の漸近展開を直接用いてもよい.

(2) $\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$ であるから, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\log(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = e \cdot e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = e \left\{ 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) \right\} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$. 故に, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \boxed{e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$ ($n \rightarrow \infty$). 《補足》同様に, $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e + \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ($n \rightarrow \infty$).

3 (1) (前半の不定積分に対する積分定数は省略する.)

(i) 被積分関数を部分分数分解して,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2+1) = \boxed{\frac{1}{2} \log \frac{x^2}{x^2+1}}.$$

(ii) 部分積分法により,

$$\begin{aligned} \int x(\log x)^2 dx &= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int \frac{x^2}{2} \frac{2 \log x}{x} dx = \frac{1}{2}x^2(\log x)^2 - \int x \log x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2(\log x)^2 - \frac{x^2}{2} \log x + \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \boxed{\frac{1}{4}x^2\{2(\log x)^2 - 2 \log x + 1\}}. \end{aligned}$$

(iii) $x^2 = t$ とおけば $x dx = \frac{dt}{2}$ であるから,

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \int t e^{-t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}(-te^{-t} + \int e^{-t} dt) = -\frac{1}{2}(t+1)e^{-t} = \boxed{-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}}.$$

(iv) $\sin x = t$ とおけば $\cos x dx = dt$ であるから,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = \boxed{\frac{1}{2} \log \frac{1+\sin x}{1-\sin x}}. \end{aligned}$$

(v) 部分積分法により,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \left[x^2 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \frac{\pi^2}{4} + 2 \left[x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \boxed{\frac{\pi^2}{4} - 2}.$$

(vi) 部分積分法により, $I := \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx = \left[-e^{-x} \sin x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx = \left[-e^{-x} \cos x \right]_0^{\pi} -$

$$\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx = e^{-\pi} + 1 - I. \quad \text{よって, } I = \boxed{\frac{1+e^{-\pi}}{2}}.$$

(vii) $\int_0^{\pi} |\sqrt{3} \sin x - \cos x| dx = \int_0^{\pi} \left| 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \right| dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} |\sin x| dx$
 $= 2 \left(\int_{-\frac{\pi}{6}}^0 (-\sin x) dx + \int_0^{\frac{5\pi}{6}} \sin x dx \right) = 2 \left([\cos x]_{-\frac{\pi}{6}}^0 + [-\cos x]_0^{\frac{5\pi}{6}} \right)$
 $= 2 \left\{ \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) \right\} = \boxed{4}.$

《別法》 $|\sin x|$ は周期 π の関数であるから, $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = 2.$

(viii) $I_{m,n} = \int_0^\pi \sin mx \sin nx \, dx$ とおく (m, n は自然数). $m \neq n$ のとき, 三角関数の積和の公式により,

$$I_{m,n} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \{-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\} \, dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]_0^\pi = \boxed{0}.$$

$m = n$ のときは, $I_{n,n} = \int_0^\pi \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2nx) \, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_0^\pi = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$

(2) (i) 連続関数 $h(x)$, 定数 c に対し, $\frac{d}{dx} \int_c^x h(t) \, dt = h(x)$ (微積分の基本定理) が成り立つことに注意する.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \left(x^2 \int_0^x f(t) \, dt - 2x \int_0^x tf(t) \, dt + \int_0^x t^2 f(t) \, dt \right) \\ &= 2x \int_0^x f(t) \, dt + x^2 \cdot f(x) - 2 \int_0^x tf(t) \, dt - 2x \cdot xf(x) + x^2 f(x) \\ &= 2 \left(x \int_0^x f(t) \, dt - \int_0^x tf(t) \, dt \right), \\ F''(x) &= 2 \left(\int_0^x f(t) \, dt + x \cdot f(x) - xf(x) \right) = 2 \int_0^x f(t) \, dt. \quad \text{よって, } F'''(x) = \boxed{2f(x)}. \end{aligned}$$

《補足》一般に, 自然数 n に対して, $F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \, dt$ とおけば, $F_n^{(n)}(x) = f(x)$ が成り立つ.

(ii) $G(x) = \int_0^x f(t) \, dt$ とおけば, $\frac{1}{x-1} \int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(t) \, dt = \frac{G(x^2) - G(\sqrt{x})}{x-1}$ ($x \rightarrow 0$ のとき $\frac{0}{0}$ 型の不定形) であるから, ロピタルの定理 (あるいは微分の定義) により,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{G(x^2) - G(\sqrt{x})}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ 2xG'(x^2) - \frac{G'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \right\} = \boxed{\frac{3}{2}f(1)}.$$

2 レポート問題

[1] (i) $\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}} = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right) \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \right) = \boxed{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^3 + o(x^3)}$ ($x \rightarrow 0$).

(ii) $\log(2+X) = \log 2 + \log\left(1 + \frac{X}{2}\right) = \log 2 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + \frac{X^3}{24} + o(X^3)$ ($X \rightarrow 0$) より,

$$\begin{aligned} \log(2+x-x^2) &= \log 2 + \frac{1}{2}(x-x^2) - \frac{1}{8}(x-x^2)^2 + \frac{1}{24}(x-x^2)^3 + o(x^3) \\ &= \boxed{\log 2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{7}{24}x^3 + o(x^3)} \quad (x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

《別法》 $\log(2+x-x^2) = \log\{(2-x)(1+x)\} = \log 2 + \log\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \log(1+x)$ と考えてもよい.

[2] 分母は $x(1-\cos x) = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$ となるから, 分子に対する 3 次の漸近展開を計算すればよい:

$$\log(1+x) - x\sqrt{1-x} = \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right) - x \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \right) = \frac{11}{24}x^3 + o(x^3).$$

よって,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x\sqrt{1-x}}{x(1-\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{11}{24}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{11}{24} + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} = \boxed{\frac{11}{12}}.$$

[3] 積和の公式を用いて,

$$\cos x \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) \cos 3x = \frac{1}{4}(1 + \cos 6x + \cos 4x + \cos 2x).$$

よって,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx = \frac{1}{4} \left[x + \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{8}}.$$

《別法》 倍角の公式, 3 倍角の公式を用いて,

$$\cos x \cos 2x \cos 3x = \cos x (2 \cos^2 x - 1)(4 \cos^3 x - 3 \cos x) = 8 \cos^6 x - 10 \cos^4 x + 3 \cos^2 x.$$

よって,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx = \left(8 \cdot \frac{5!!}{6!!} - 10 \cdot \frac{3!!}{4!!} + 3 \cdot \frac{1!!}{2!!} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$