数学演習第一（演習第 10 回）

線形：4 次以上の行列式

2023 年 7 月 12 日

【要点】

演習第 8 回で 2 次, 3 次の行列式を公式に従って計算した. 今回は 4 次以上の行列式の計算法を学習する. まず, 行列式を定義する準備として, 次の記号を用意する.

〈A_{ij} の定義〉 (線形教科書 p.80)

n 次正方行列 A の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次正方行列を A_{ij} と記す.

◎ 例えば $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ であるなら $A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

これを用いて n 次の行列式を n に関して帰納的に定義する.

〈行列式の定義〉 (線形教科書 p.65)

1×1 行列 $A = [a]$ に対して $|A| = a$ とする. $n-1$ 次正方行列に対して行列式が定義できたとするとき, n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の行列式 $|A|$ を次で定義する.

$$|A| = (-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}| + (-1)^{2+1}a_{21}|A_{21}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}|A_{n1}|$$

定義を直接適用して行列式を計算すると, 例えば A が 4 次の行列式だと右辺に 3 次の行列式が 4 つ出てきて計算が複雑になる. そのため, 次の定理を用いて計算することが多い.

〈行列式と行基本変形との関係〉 (線形教科書 p.68)

n 次正方行列 A の行ベクトル分割を $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ とするとき行列式 $|A|$ は次を満たす.

(1) ある i について $\mathbf{a}_i = c\,\mathbf{b}_i$ ならば,
$$|A| = \begin{vmatrix} \vdots \\ c\,\mathbf{b}_i \\ \vdots \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \end{vmatrix}$$

(2) 2 つの行 $\mathbf{a}_i$ と $\mathbf{a}_j$ を入れ換えると, 行列式は -1 倍される:
$$|A| = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix}$$

(3) $i \neq j$ のとき, $\mathbf{a}_j$ に $\mathbf{a}_i$ の c 倍を加えても行列式は変わらない:
$$|A| = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j + c\,\mathbf{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix}$$

◎ 例えば $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ の行列式は次のように計算できる.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -5 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -5 & -6 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -5.$$

これ以外の行列式に関する主要な定理を挙げる.

〈行列式に関する定理〉A, B は n 次正方行列とする. このとき次が成立する.

(1) A が正則 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$.

(2) $|AB| = |A||B|$. 特に, A が正則行列のとき $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

(3) $|{}^tA| = |A|$.

(3) の性質のおかげで, 行列式と行基本変形との関係は列基本変形に対しても成立する.

A の余因子行列についても述べておく.

〈余因子の定義〉 (線形教科書 p.81)

n 次正方行列 A に対し $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ を A の $\boldsymbol{(i,j)}$ **余因子** という.

◎ 例えば $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ であるなら $A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ であるので $(2,2)$ 余因子は $(-1)^{2+2}|A_{22}| = 3$.

〈余因子展開〉 (線形教科書 p.81)

余因子を用いて行列式を "展開" することができる.

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+j}a_{1j}|A_{1j}| + (-1)^{2+j}a_{2j}|A_{2j}| + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}|A_{nj}| \quad (\text{第 } j \text{ 列に関する余因子展開}) \\ &= (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}| \quad (\text{第 } i \text{ 行に関する余因子展開}). \end{aligned}$$

第 1 列に関する余因子展開は上述の行列式の定義の中に現れる.

〈余因子行列の定義〉 (線形教科書 p.83)

n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対し, (i,j) 成分が (j,i) 余因子であるような n 次正方行列を A の**余因子行列**といい $\widetilde{A}$ で表す. したがって $\widetilde{A}$ の (i,j) 成分は $(-1)^{j+i}|A_{ji}|$ である.

◎ 例えば $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ に対しては $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{bmatrix}$

〈余因子行列の性質〉 (線形教科書 p.83)

$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|E$. 特に, $|A| \neq 0$ ならば, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}$.

1　演習問題

1 次の行列式の値を求めよ．((1) は演習書問題 9.3.2 (3); (2), (3), (4) は演習書問題 9.3.3)

【注】線形教科書例題 10.7 が基本．線形教科書 p.77 にある列基本変形も有効．

$$(1)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} \qquad (3)\ \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \qquad (4)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(5)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

2 n 次正方行列 A の余因子行列を $\widetilde{A}$，n 次単位行列を E とする．

(1) $|dE|$ (d はスカラー) を d を用いて表せ．　　　(2) $|\widetilde{A}|$ を $|A|$ を用いて表せ．

((2) のヒント：恒等式 $A\widetilde{A} = |A|E$ の両辺の行列式をとって，左辺には線形教科書定理 11.3, 右辺には (1) を適用.)

3 4 次正方行列 A の行ベクトル分割を $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$ とし，A の行列式の値を $|A| = 2$ とする．このとき，次の行列式の値を求めよ．

$$(1)\ \begin{vmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{a} \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} \boldsymbol{b} \\ -3\boldsymbol{a} \\ 2\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{vmatrix} \qquad (3)\ \begin{vmatrix} 10\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{d} \end{vmatrix} \qquad (4)\ \begin{vmatrix} 2\boldsymbol{a} \\ -3\boldsymbol{b} \\ -5\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{c} \\ 7\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d} \end{vmatrix}$$

4 5 つの 4 次列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ の間には，4 次の行列式を用いた関係式

$$|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{d}| = 3, \quad |\boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{d}| = 9, \quad |\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{d}| = 3, \quad |\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{d}| = -6, \quad |\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{e}| = 6$$

が成り立つという．スカラー w, x, y, z, t の間に $w\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c} + z\boldsymbol{d} = t\boldsymbol{e}$ という関係があるとき，w, x, y, z をそれぞれ t の式で表せ．

5 次の行列式を因数分解した形で求めよ．（この形の行列式を **ヴァンデルモンドの行列式** という.）

$$(1)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

$\boxed{6}$ (1) $P_4 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 & \cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 & \cos\theta_2\cos\theta_3 & -\sin\theta_3 \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 & \cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 & \cos\theta_2\sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{bmatrix}$ の行列式 $|P_4|$ の値を求めよ．より一般に，n 次正方行列 P_n ($n \geq 2$: 自然数) を，$P_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$ および

$$P_{n+1} = \begin{bmatrix} P_n' & \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_n\cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \mathbf{p}_n\sin\theta_n & \cos\theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{n-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \mathbf{0} & \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n' & \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_n & 0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (n \geq 2)$$

(ただし $P_n = \begin{bmatrix} P_n' \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_n$ は P_n の第 n 行, E_{n-1} は $n-1$ 次の単位行列) により帰納的に定義するとき，行列式 $|P_n|$ の値を求めよ．

(2) 演習書問題 9.3.6 (6) を解け．

$$\begin{vmatrix} x^2+1 & x & & & & O \\ x & x^2+1 & x & & & \\ & x & x^2+1 & x & & \\ & & x & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & x \\ O & & & & x & x^2+1 \end{vmatrix} \qquad (n \text{ 次}).$$

2　レポート問題 (WebClass 提出用)

(1) $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とする．$|A|$ を求めよ．

(2) (1) の A に対して $|\widetilde{A}|$ を求めよ．

(3) ヴァンデルモンドの行列式を用いて，$\begin{vmatrix} 3 & 3^2 & 1 & 3^3 \\ 2 & 2^2 & 1 & 2^3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 7 & 7^2 & 1 & 7^3 \end{vmatrix}$ を求めよ．

(4) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ とする．$\widetilde{B}$ および B^{-1} を求めよ．