数学演習第一（演習第 10 回）【解答例】

線形： 4 次以上の行列式　　2023 年 7 月 12 日

1　演習問題

$\boxed{1}$ (1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 16\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 96.$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 12 & 13 & 1 & 5 \\ 11 & 16 & -1 & 6 \\ 10 & 9 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 11 & 11 & 0 & 1 \\ 12 & 18 & 0 & 10 \\ 11 & 11 & 0 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 11 & 1 \\ 12 & 18 & 10 \\ 11 & 11 & 11 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 11 & 11 & 1 \\ 12 & 18 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 11 & 11 \\ 12 & 18 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 11 & 0 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 660.$

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 8\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 32\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 32\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -128.$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ -5 & 11 & -9 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ -5 & 11 & -9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ -5 & 11 & -4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 21\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -42.$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -21 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -21 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 & -2 \\ -21 & 1 & -5 & 7 \end{vmatrix} =$

$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -20 & -26 & 70 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ -10 & -13 & 35 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 35 & -13 & -10 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \\ 35 & -13 & -10 \end{vmatrix} =$

$-2\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 92 & -150 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 46 & -75 \end{vmatrix} = -20\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 46 & -15 \end{vmatrix} = -20.$

$\boxed{2}$ (1) $|dE| = d^n|E| = d^n.$

(2) A が正則なら, $|A||\widetilde{A}| = |A|^n$ を $|A| \neq 0$ で割って, $|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$. A が正則でないとき, $\widetilde{A}$ が正則と仮定すれば, $A\widetilde{A} = |A|E = 0$ より $A = O$. このとき, 定義より $\widetilde{A} = O$ となり, $\widetilde{A}$ の仮定に反する. よって, $|A| = 0 \Rightarrow |\widetilde{A}| = 0$ となるので, この場合も含めて, $|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$ が成立する.

【別法】恒等式 $A\widetilde{A}=|A|E$ の両辺の行列式をとって $|A\widetilde{A}|=\big||A|E\big|$．これより，$|A||\widetilde{A}|=|A|^n$．両辺を 0 でない "多項式" $|A|$ で割り算して，$|\widetilde{A}|=|A|^{n-1}$．($A=[a_{ij}]$ とすると，$\widetilde{A}$ の各成分は n^2 個の変数 a_{ij} の多項式で，$|A|$, $|\widetilde{A}|$ ともに，n^2 個の変数 a_{ij} の多項式である．よって，上記のように，$|\widetilde{A}|$ と $|A|^{n-1}$ は，まず n^2 個の変数 a_{ij} の多項式として等しいことがわかり，従って，n^2 個の変数 a_{ij} にどんな値をいれても等しいことがわかる.)

3

(1) $\begin{vmatrix}\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{d}\\\boldsymbol{a}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{d}\\\boldsymbol{a}\end{vmatrix}=(-1)^2\begin{vmatrix}\boldsymbol{d}\\\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{a}\end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{d}\end{vmatrix}=-2.$

(2) $\begin{vmatrix}\boldsymbol{b}\\-3\boldsymbol{a}\\2\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{d}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-3\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\\2\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{d}\end{vmatrix}=-(-3)\cdot 2\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{d}\end{vmatrix}=12.$

(3) $\begin{vmatrix}10\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\\2\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}\end{vmatrix}=10\cdot 2\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}\end{vmatrix}=0.$

(4) $\begin{vmatrix}2\boldsymbol{a}\\-3\boldsymbol{b}\\-5\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{c}\\7\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\boldsymbol{a}\\-3\boldsymbol{b}\\4\boldsymbol{c}\\7\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\boldsymbol{a}\\-3\boldsymbol{b}\\4\boldsymbol{c}\\-\boldsymbol{d}\end{vmatrix}=2\cdot(-3)\cdot 4\cdot(-1)\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\\\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{d}\end{vmatrix}=48.$

4

関係式 $w\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}+y\boldsymbol{c}+z\boldsymbol{d}=t\boldsymbol{e}$ は w,x,y,z を変数とする連立 1 次方程式 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}&\boldsymbol{b}&\boldsymbol{c}&\boldsymbol{d}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w\\x\\y\\z\end{bmatrix}=t\boldsymbol{e}$ と見なせるので，クラメルの公式より，

$$w=\frac{|t\boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{d}|}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{d}|}=\frac{t\,|\boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{d}|}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{d}|}=\frac{9t}{3}=3t,$$

$$x=\frac{|\boldsymbol{a}\ \ t\boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{d}|}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{d}|}=\frac{3t}{3}=t,\ \ y=\frac{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ t\boldsymbol{e}\ \ \boldsymbol{d}|}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{d}|}=\frac{-6t}{3}=-2t,\ \ z=\frac{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\ \ t\boldsymbol{e}|}{|\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{d}|}=\frac{6t}{3}=2t.$$

5

(1) $\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\x_1^2&x_2^2&x_3^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1\\0&x_2^2-x_2x_1&x_3^2-x_3x_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_2-x_1&x_3-x_1\\x_2^2-x_2x_1&x_3^2-x_3x_1\end{vmatrix}=(x_3-x_1)(x_2-x_1)\begin{vmatrix}1&1\\x_2&x_3\end{vmatrix}=(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1).$

(2)

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\\x_1^3&x_2^3&x_3^3&x_4^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&x_4-x_1\\0&x_2^2-x_2x_1&x_3^2-x_3x_1&x_4^2-x_4x_1\\0&x_2^3-x_2^2x_1&x_3^3-x_3^2x_1&x_4^3-x_4^2x_1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x_2-x_1&x_3-x_1&x_4-x_1\\x_2^2-x_2x_1&x_3^2-x_3x_1&x_4^2-x_4x_1\\x_2^3-x_2^2x_1&x_3^3-x_3^2x_1&x_4^3-x_4^2x_1\end{vmatrix}=(x_4-x_1)(x_3-x_1)(x_2-x_1)\begin{vmatrix}1&1&1\\x_2&x_3&x_4\\x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}$$

(1) の結果より，$\begin{vmatrix}1&1&1\\x_2&x_3&x_4\\x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}=(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_3-x_2)$ なので，

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\\x_1^3&x_2^3&x_3^3&x_4^3\end{vmatrix}=(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1).$$

6

(1) $|P_2| = \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{vmatrix} = 1$ である．$n \geq 2$ なる自然数に対し，$\begin{vmatrix} {P_n}' \\ \mathbf{p}_n \end{vmatrix} = |P_n| = 1$ と仮定すると，

$$|P_{n+1}| = \begin{vmatrix} E_{n-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \mathbf{0} & \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} {P_n}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_n & 0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{vmatrix} |P_n| = 1 \cdot 1 = 1$$

となる．故に，数学的帰納法により $n \geq 2$ なる自然数に対し $|P_n| = 1$ である．特に $|P_4| = 1$.

【補足】 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta_1 \\ r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \vdots \\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2} \\ r\sin\theta_1\cdots\cdots\cdots\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ r\sin\theta_1\cdots\cdots\cdots\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{bmatrix}$ を n 次元での極座標変換とし，$n \geq 2$ に対し，$\widetilde{x}_{n-1} = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}$ とするとき，$x_{n-1} = \widetilde{x}_{n-1}\cos\theta_{n-1}$, $x_n = \widetilde{x}_{n-1}\sin\theta_{n-1}$ だから，

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{n-2} \\ dx_{n-1} \\ dx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{n-2} \\ \cos\theta_{n-1}d\widetilde{x}_{n-1} - \widetilde{x}_{n-1}\sin\theta_{n-1}d\theta_{n-1} \\ \sin\theta_{n-1}d\widetilde{x}_{n-1} + \widetilde{x}_{n-1}\cos\theta_{n-1}d\theta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E_{n-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cos\theta_{n-1} & -\sin\theta_{n-1} \\ \mathbf{0} & \sin\theta_{n-1} & \cos\theta_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{n-2} \\ d\widetilde{x}_{n-1} \\ \widetilde{x}_{n-1}d\theta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= P_n \begin{bmatrix} dr \\ rd\theta_1 \\ \vdots \\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}d\theta_{n-2} \\ r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}d\theta_{n-1} \end{bmatrix}$$

という形で P_n は現れる．(dx_i や dr, $d\theta_i$ などは後期の微分積分学第二で学ぶ (全) 微分である．) 最後の等号は帰納的にわかるものであり，$\widetilde{x}_1 = r$ に注意する．)

(2) 求める行列式は x の多項式となるので $f_n(x)$ とおく．第 1 行に関して余因子展開し，$f_n(x) = (x^2+1)f_{n-1}(x) - x^2 f_{n-2}(x)$ を得る．$f_1(x) = x^2+1$，$f_2(x) = (x^2+1)^2 - x^2 = x^4+x^2+1$ より，$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}$ であると予想される．これを数学的帰納法により示そう．$n \leq 2$ のとき，確かに成り立つ．$n \geq 3$ のとき，$f_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k}$，$f_{n-2}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k}$ であるとすれば (帰納法の仮定),

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (x^2+1)f_{n-1}(x) - x^2 f_{n-2}(x) = (x^2+1)\sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} - x^2 \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} + x^2 \cdot x^{2(n-1)} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k} \end{aligned}$$

より n のときも確かに成り立つ．故に，$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k} = x^{2n} + x^{2(n-1)} + \cdots + x^2 + 1$.

2　レポート課題 (WebClass 提出用)

(1) $$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -16 & 4 \\ 0 & -6 & 25 & -5 \\ 0 & 2 & -9 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -16 & 4 \\ -6 & 25 & -5 \\ 2 & -9 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} 2 & -9 & 2 \\ -6 & 25 & -5 \\ 5 & -16 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -9/2 & 1 \\ -6 & 25 & -5 \\ 5 & -16 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -9/2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 13/2 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 13/2 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{-9}.$$

(2) $\boxed{2}$ (2) より，$|\widetilde{A}| = |A|^{4-1} = (-9)^3 = \boxed{-729}$.

(3) $$\begin{vmatrix} 3 & 3^2 & 1 & 3^3 \\ 2 & 2^2 & 1 & 2^3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 7 & 7^2 & 1 & 7^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 \\ 3^2 & 2^2 & 1 & 7^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3^3 & 2^3 & -1 & 7^3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3^2 & 2^2 & 1 & 7^2 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \\ 3^3 & 2^3 & -1 & 7^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \\ 3^2 & 2^2 & 1 & 7^2 \\ 3^3 & 2^3 & -1 & 7^3 \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \\ 3^2 & 2^2 & (-1)^2 & 7^2 \\ 3^3 & 2^3 & (-1)^3 & 7^3 \end{vmatrix} = (7-(-1))(7-2)(7-3)((-1)-2)((-1)-3)(2-3) = \boxed{-1920}.$$

(4) $|B_{11}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5,\quad |B_{21}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2,\quad |B_{31}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9,$

$|B_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3,\quad |B_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3,\quad |B_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4,$

$|B_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\quad |B_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\quad |B_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

なので，$\widetilde{B} = \boxed{\begin{bmatrix} 5 & 2 & -9 \\ -3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}$. $|B| = 7$ なので，$B^{-1} = \dfrac{1}{|B|}\widetilde{B} = \boxed{\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -9 \\ -3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}$.