数学演習第一　演習第 11 回

微積：積分の計算 (2)

2023 年 7 月 19 日　実施

要点

I. 基本的な不定積分．以下，積分定数 C は省略する．

(1) $(\mathrm{Sin}^{-1}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ なので，$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Sin}^{-1}x$.

(2) $(\mathrm{Tan}^{-1}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ なので，$\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{Tan}^{-1}x$.

(3) $a>0$ かつ $a\neq 1$ のとき，$(a^x)' = a^x\log a \iff \left(\dfrac{a^x}{\log a}\right)' = a^x$　なので，$\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}$.

(4) $a\neq 0$ のとき，$\left\{\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\,\right|\right\}' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$ より，$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+a}\,\right|$.
あるいは $\sqrt{x^2+a} = t-x$ として置換積分する（$\boxed{1}$ (3)).

II. 有理式 $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ ($p(x), q(x)$ は x の多項式) の積分．部分分数分解してから積分する（微積教科書 p.62）．例えば，

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)'}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right\}$$

なので，

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}x.$$

III. 無理関数を含む関数 $f(x)$ の積分．$f(x)$ が x と $\sqrt[n]{ax+b}$ $(a\neq 0)$ の有理式のとき，$t=\sqrt[n]{ax+b}$ として置換積分する（微積教科書 p.63）．例えば，

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} \underset{(t=\sqrt{1-x})}{=} \int \frac{-2t\,dt}{(1-t^2)t} = \int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \log\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right|.$$

IV. 三角関数の有理式の積分．$u=\tan\dfrac{x}{2}$ として置換積分する．例えば，

$$\int \frac{dx}{\sin x} \underset{(u=\tan\frac{x}{2})}{=} \int \frac{1+u^2}{2u}\frac{2du}{1+u^2} = \log|u| = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$$

【注】$u=\tan\dfrac{x}{2}$ のとき，$\sin x = \dfrac{2u}{1+u^2}$，$\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$，$dx = \dfrac{2\,du}{1+u^2}$.

次のような方法もある:

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}\right)\sin x\,dx = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right).$$

ここで，$\tan^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ だから，これは上の結果と一致している．

V. 定積分の計算（微積教科書 p.57）．$f(x)$ が $[a,b]$ で連続とする．$f(x)$ の $[a,b]$ における不定積分 (の 1 つ) を $F(x)$ とすると，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b$ となる．

1　演習問題

1 （一部は演習書 例題 4.1 問題 4.1.1）

次の不定積分を求めよ．ただし，$a>0$, $A\neq 0$ (定数) とする．

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}$　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}$　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}$　(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(5) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,dx$　(6) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$　(7) $\displaystyle\int \mathrm{Sin}^{-1}\,x\,dx$　(8) $\displaystyle\int \mathrm{Tan}^{-1}\,x\,dx$

ヒント：(5) は $\sqrt{x^2+A}=(x\sqrt{x^2+A})'-x(\sqrt{x^2+A})'$ を用いて部分積分する．

2 次の有理関数の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-3x+2}\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-16}$

(4) $\displaystyle\int \frac{3x^3+x}{x^2+3}\,dx$　(5) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^4+4}\,dx$　(6) $\displaystyle\int \frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}\,dx$

ヒント：(2) は $\displaystyle\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+1}$ の形で表す．

3 （一部は演習書 問題 4.3.1）次の無理関数の不定積分を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx$　(2) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$

ヒント：(3) は $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x$ として置換積分する．

4 次の三角関数の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (\sin^4 x+\cos^4 x)\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+3\cos x}$　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$

ヒント：(3) は $u=\tan x$ として置換積分する．

5 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{Sin}^{-1}\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+5\sin x}$

6 （一部は演習書 問題 4.4.11）以下の問いに答えよ．

(1) $p>0$ に対して広義積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x)^p}$ の収束・発散を調べよ．

(2) 円板 $(x-a)^2+y^2\leq b^2$ $(a>b>0)$ を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

(3) 曲線：$x^{2/3}+y^{2/3}=1$ の長さ L を求めよ．

2　レポート問題（WebClass へ提出）

1 次の不定積分を求めよ．(積分定数は省略してよい．)

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x^3}$　　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$

2 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 x2^x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$　　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\mathrm{Tan}^{-1}\,x)^2}{1+x^2}\,dx$