数学演習第一・中間統一試験【解説】

2023 年 6 月 14 日実施 ・ 試験時間 90 分

1 逆三角関数について, 次の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\cos\dfrac{6\pi}{7}\right)$ の値を求めよ.

【答】 $\cos\dfrac{6\pi}{7}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{6\pi}{7}\right)=\sin\left(-\dfrac{5\pi}{14}\right)$, $-\dfrac{5\pi}{14}\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ より, $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\cos\dfrac{6\pi}{7}\right)=\boxed{-\dfrac{5\pi}{14}}$.

(2) 関数 $y=\mathrm{Cos}^{-1}x$ の値域を書け.

【答】 $\boxed{0\leqslant y\leqslant \pi}$.

(3) 方程式 $\mathrm{Cos}^{-1}x+\mathrm{Tan}^{-1}2=\dfrac{3\pi}{4}$ を解け. ただし, 解は実数の範囲で考える.

【答】 $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}2\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく. $\tan\alpha=2>1$ より $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから, $\mathrm{Cos}^{-1}x=\dfrac{3\pi}{4}-\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$. よって, 解は確かに存在し, $x=\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\dfrac{3\pi}{4}\cos\alpha+\sin\dfrac{3\pi}{4}\sin\alpha$ で与えられる. ここで, $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ より, $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{10}}}\left(=\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$.

2 次の極限値を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{6}-\sqrt[n]{3}\right)$

【答】 $x=\frac{1}{n}$ とおけば, $n\to\infty$ のとき $x\to 0$ であるから, ロピタルの定理を用いて (ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で表した),

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{6}-\sqrt[n]{3}\right)=\lim_{x\to0}\frac{6^x-3^x}{x}\overset{\star}{=}\lim_{x\to0}\frac{6^x\log 6-3^x\log 3}{1}=\log 6-\log 3=\boxed{\log 2}.$$

［別法］ 次のように考えればロピタルの定理を用いるまでもない. $x=\frac{1}{n}$ とおいて,

$$n\left(\sqrt[n]{6}-\sqrt[n]{3}\right)=\frac{6^x-3^x}{x}=3^x\cdot\frac{2^x-1}{x}\xrightarrow[x\to0]{n\to\infty}\boxed{\log 2}.\quad(2^x \text{ の } x=0 \text{ での微分係数は } \log 2)$$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\tan x}$

【答】 ロピタルの定理を用いて,

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\tan x}=\left(\lim_{x\to0}\cos x\right)\left(\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}\right)\overset{\star}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin x+x\cos x}\overset{\star}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2\cos x-x\sin x}=\boxed{\frac{1}{2}}.$$

［別法］ 三角関数の性質を用いればロピタルの定理は必要ない.

$$\frac{1-\cos x}{x\tan x}=\frac{(1-\cos x)\cos x}{x\sin x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\cos x}{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos x}{2\cos\frac{x}{2}}\xrightarrow{x\to0}\boxed{\frac{1}{2}}.$$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{Tan}^{-1}x\right)^x$

【答】 対数をとって考える.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{Tan}^{-1}x\right)^x&=\lim_{x\to\infty}x\log\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{Tan}^{-1}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(\mathrm{Tan}^{-1}x)+\log\frac{2}{\pi}}{\frac{1}{x}}\\&\overset{\star}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\mathrm{Tan}^{-1}x}\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\mathrm{Tan}^{-1}x}\frac{-x^2}{1+x^2}=-\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

よって, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{Tan}^{-1}x\right)^x=\boxed{e^{-\frac{2}{\pi}}}$.

3 関数の微分係数について, 次の問いに答えよ.

(7) 関数 $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2}$ に対して, $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ.

【答】 $f(x)$ は $|x| \leqslant 1$ において定義され, $0 < |x| < 1$ において微分可能となる. 導関数は

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

よって, $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \boxed{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}\left(= \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

(8) 関数 $g(x) = (\tan x)^{\sqrt{x}}$ に対して, $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ を求めよ.

【答】 $g(x)$ は $\dfrac{\pi}{4}$ を含む区間 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ で定義され, 微分可能となる. $\log g(x) = \sqrt{x}\,\log(\tan x)$ を微分すると,

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\log(\tan x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\tan x \cos^2 x}. \qquad \therefore\ \frac{g'(\frac{\pi}{4})}{g(\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{\pi}.$$

ここで $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ であるから, $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \boxed{\sqrt{\pi}}$.

(9) 関数 $y = \cosh x\ (x < 0)$ の逆関数 $x = \varphi(y)$ に対して, $\varphi'(3)$ を求めよ.

【答】 $y = \cosh x\ (x < 0)$ より, $\varphi'(y) = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{\sinh x}$. ここで, $x < 0$ においては $\sinh x < 0$ であるから, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ より, $\sinh x = -\sqrt{\cosh^2 x - 1}$. よって, $\varphi'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$. これより, $\varphi'(3) = \boxed{-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}\left(= -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

［別法］ $y = \cosh x\ (x < 0)$ の逆関数 $x = \varphi(y)$ の具体形を求め, それを用いて $\varphi'(3)$ を計算しよう. まず, $y = \cosh x$ の両辺を $2e^x$ 倍して整理すれば, $(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$. $x < 0$ より, $0 < e^x < 1$ であるから, $y > 1$ に注意して,

$$e^x = y - \sqrt{y^2-1} = \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}. \qquad \therefore\ x = -\log(y + \sqrt{y^2-1}\,) \quad (y > 1).$$

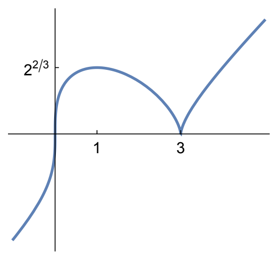
よって, $\varphi(y) = -\log(y + \sqrt{y^2-1}\,)\ (y > 1)$ となり,

$$\varphi'(y) = -\frac{1 + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}}{y + \sqrt{y^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}. \qquad \therefore\ \varphi'(3) = \boxed{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}.$$

4 (10) 関数 $h(x) = x^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{2}{3}}$ の極値を求めよ. ただし, すべての極値 b に対して「$x = a$ で極大値 (or 極小値) b」という形で答えよ.

【答】 $h(x) = x^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{2}{3}}$ は $\mathbb{R}$ 全体で定義され, $x \neq 0, 3$ において微分可能で,

$$h'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot (x-3)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3}(x-3)^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{2}{3}}(x-3)^{-\frac{1}{3}}(x-1).$$



これより, $h(x)$ の増減は次の通り:

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$+$
$h(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$h(1)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$h(1) = (-2)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}\ (= \sqrt[3]{4}\,)$ より, $h(x)$ は $\boxed{x = 1\ \text{で極大値}\ 2^{\frac{2}{3}}}$, $\boxed{x = 3\ \text{で極小値}\ 0}$ をとる.

《注》 $n \in \mathbb{N}$ (正の整数) のとき, 関数 x^n は $[0, \infty)$ において連続かつ単調増加で, $[0, \infty)$ を値域とするので, $[0, \infty)$ を定義域とする逆関数 $x^{\frac{1}{n}}\ (= \sqrt[n]{x}\,)$ が存在し, 連続かつ単調増加となる. 特に n が奇数のときは, x^n

が $\mathbb{R}$ において単調増加な奇関数であるから, 逆関数 $x^{\frac{1}{n}}$ の定義域は $\mathbb{R}$ に拡張され, 単調増加な奇関数となる. この問題に現れる関数 $x^{\frac{1}{3}}$, $(x-3)^{\frac{2}{3}}$ $\left(=\{(x-3)^{\frac{1}{3}}\}^2=\{(x-3)^2\}^{\frac{1}{3}}\right)$ はともに $\mathbb{R}$ で定義され, $x^{\frac{1}{3}} \gtrless 0$ $(x \gtrless 0)$ (不等号同順), $(x-3)^{\frac{2}{3}} > 0$ $(x \neq 3)$ となることに注意.

5 3 点 $\mathrm{P}(1,-1,0)$, $\mathrm{Q}(2,-2,-1)$, $\mathrm{R}(-3,2,1)$ を通る平面を α とする. 次の問いに答えよ.

(11) 原点 O を通り, 平面 α に直交する直線の方程式を求めよ.

【答】 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ は平面 α の法線ベクトルであり, α と直交する直線の方向ベクトルとなる. よって, 求める直線の方程式は $\boxed{\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-1}}$.

(12) 4 点 O, P, Q, R を頂点とする四面体の体積を求めよ.

【答】
$$\begin{aligned}(\text{四面体 OPQR の体積}) &= \frac{1}{6}\,(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{PR}}, \overrightarrow{\mathrm{PO}} \text{ の作る平行六面体の体積}) \\ &= \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{PO}}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right| = \boxed{\frac{1}{6}}.\end{aligned}$$

［別法］ $\vec{n} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}}$ とおけば,

$$(\text{三角形 PQR の面積}) = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{PR}} \text{ の作る平行四辺形の面積}) = \frac{1}{2}\|\vec{n}\| \left(= \frac{\sqrt{14}}{2}\right),$$

$$\underbrace{(\text{点 O と平面 PQR の距離})}_{\text{O から平面 PQR に下ろした垂線の長さ}} = (\overrightarrow{\mathrm{OP}} \text{ の } \vec{n} \text{ 方向の直線への正射影の長さ}) = \left\|\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}\right\| = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

であるから,

$$\underbrace{(\text{四面体 OPQR の体積})}_{\text{三角錐 O-PQR}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\|\vec{n}\| \cdot \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{6}\,|\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \vec{n}| = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

なお, 平面 PQR の方程式は $2(x-1)+3(y+1)-z=0$ すなわち $2x+3y-z+1=0$ であるから,

$$(\text{点 O と平面 PQR の距離}) = \frac{1}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

と計算することもできる.

6 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ を用いて, $M = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix}$ と定める. 次の問いに答えよ.

(13) 行列 $M\,{}^{\mathrm{t}}N$ は正則か? 正則ならば, 逆行列を求めよ (行列の前にスカラー倍が現れない形で表せ).

【答】 $M\,{}^{\mathrm{t}}N = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^{\mathrm{t}}B \\ {}^{\mathrm{t}}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ より, $M\,{}^{\mathrm{t}}N$ は正則で, その逆行列は

$$(M\,{}^{\mathrm{t}}N)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-40}\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -\frac{3}{20} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}}.$$

(14) 行列 ${}^{\mathrm{t}}MN$ の第 3 行の行ベクトルを答えよ.

【答】 ${}^{\mathrm{t}}MN = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 10 & -3 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ より, ${}^{\mathrm{t}}MN$ の第 3 行の行ベクトルは $\boxed{\begin{bmatrix} 10 & -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}}$.

(15) 行列 ${}^{\mathrm{t}}MN$ の簡約行列を求めよ.

【答】 行基本変形により,

$$
{}^{\mathrm{t}}MN = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 10 & -3 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow -②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -2 \\ 10 & -3 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③-10\times① \\ ④+3\times①}]{②-5\times①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & -3 & -15 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{②\leftrightarrow ④} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & -15 & 9 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[④+②]{③+3\times②} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}.
$$

7 (16) 行列 $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ に対して, $XC = D$ を満たす行列 X は存在するか? 存在するなら, そのような X を求めよ.

【答】 C は逆行列 $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ をもつ. よって, $XC = D$ の右側から C^{-1} を掛けて,

$$
X = DC^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}}.
$$

8 連立 1 次方程式に関する以下の問いに答えよ. ただし, (18), (20) において解が任意定数を含む場合は, 任意定数の選び方は標準的な方法, すなわち線形代数の教科書に書かれている方法 (= 演習の解答例の方法) に従え. また, 任意定数の文字は s, t, ... をこの順に用いよ.

(17) 同次連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$ の係数行列の階数を求めよ.

【答】 係数行列を行基本変形して,

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -4 & 5 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③+① \\ ④-2\times①}]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③+2\times② \\ ④+②}]{①-②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{③\leftrightarrow ④} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{②+2\times③ \\ ④+3\times③}]{①-③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

よって, 係数行列の階数は $\boxed{3}$.

(18) (17) の同次連立 1 次方程式を解け.

【答】 (17) の結果より, (17) の同次連立 1 次方程式は $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 - 3x_5 = 0 \\ x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$ と同値となる.

ここで, "主成分に対応しない変数" x_3, x_5 を任意定数にとり, $x_3 = s$, $x_5 = t$ とおいて, 解は

$$
\boxed{\begin{cases} x_1 = -2s - t \\ x_2 = s + 3t \\ x_3 = s \\ x_4 = 3t \\ x_5 = t \end{cases}} \quad \text{あるいは} \quad \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad (s, t \text{ は任意定数})
$$

で与えられる (どちらか一方の形で答えればよい).

(19) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 = 3 \\ x_1 + kx_2 - 5x_3 = -2 \end{cases}$ が無数の解をもつための定数 k の条件を求めよ.

【答】 説明の便宜のために与えられた連立 1 次方程式を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表す. 拡大係数行列 $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ に行基本変形を施し,

$$\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & k & 3 \\ 1 & k & -5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-\text{①}]{\text{②}-2\times\text{①}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & k-2 & 1 \\ 0 & k-1 & -6 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-k & -1 \\ 0 & k-1 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{③}-(k-1)\times\text{②}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-k & -1 \\ 0 & 0 & (k+1)(k-4) & k-4 \end{bmatrix}.$$

よって, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ について,

- $k \neq -1, 4$ のとき, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = 3$ であるから, ただ 1 つの解が存在する.
- $k = -1$ のとき, $\operatorname{rank} A = 2$, $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = 3$ であるから, 解は存在しない.
- $k = 4$ のとき, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = 2 < 3$ であるから, 無数の解が存在する.

故に, 求める条件は $\boxed{k = 4}$.

(20) k が (19) の条件を満たすとき, (19) の連立 1 次方程式を解け.

【答】 $k = 4$ のとき, 行基本変形により $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ と簡約化されるから, (19) の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$ と同値となる. ここで, "主成分に対応しない変数" x_3 を任意定数にとり, $x_3 = s$ とおいて, 解は

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 2 - 3s \\ x_2 = -1 + 2s \\ x_3 = s \end{cases}} \quad \text{あるいは} \quad \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad (s \text{ は任意定数})$$

で与えられる (どちらか一方の形で答えればよい).