

数学演習第一・中間統一試験【問題用紙】

2023年6月14日実施・試験時間90分

— 解答用紙には答えのみを整理された形で記入せよ —

1 逆三角関数について、次の問いに答えよ。

- (1) $\text{Sin}^{-1}\left(\cos\frac{6\pi}{7}\right)$ の値を求めよ。 (2) 関数 $y = \text{Cos}^{-1}x$ の値域を書け。
(3) 方程式 $\text{Cos}^{-1}x + \text{Tan}^{-1}2 = \frac{3\pi}{4}$ を解け。ただし、解は実数の範囲で考える。

2 次の極限値を求めよ。

- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{6} - \sqrt[n]{3})$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x}$ (6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \text{Tan}^{-1}x\right)^x$

3 関数の微分係数について、次の問いに答えよ。

- (7) 関数 $f(x) = \text{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2}$ に対して、 $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ を求めよ。
(8) 関数 $g(x) = (\tan x)^{\sqrt{x}}$ に対して、 $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ を求めよ。
(9) 関数 $y = \cosh x$ ($x < 0$) の逆関数 $x = \varphi(y)$ に対して、 $\varphi'(3)$ を求めよ。

4 (10) 関数 $h(x) = x^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{2}{3}}$ の極値を求めよ。ただし、すべての極値 b に対して「 $x = a$ で極大値 (or 極小値) b 」という形で答えよ。

5 3点 $P(1, -1, 0)$, $Q(2, -2, -1)$, $R(-3, 2, 1)$ を通る平面を α とする。次の問いに答えよ。

- (11) 原点 O を通り、平面 α に直交する直線の方程式を求めよ。
(12) 4点 O, P, Q, R を頂点とする四面体の体積を求めよ。

6 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ を用いて、 $M = [A \ B]$, $N = [B \ A]$ と定める。次の問いに答えよ。

- (13) 行列 M^tN は正則か? 正則ならば、逆行列を求めよ (行列の前にスカラー倍が現れない形で表せ)。
(14) 行列 tMN の第3行の行ベクトルを答えよ。 (15) 行列 tMN の簡約行列を求めよ。

7 (16) 行列 $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ に対して、 $XC = D$ を満たす行列 X は存在するか? 存在するならば、そのような X を求めよ。

8 連立1次方程式に関する以下の問いに答えよ。ただし、(18), (20)において解が任意定数を含む場合は、任意定数の選び方は標準的な方法、すなわち線形代数の教科書に書かれている方法 (= 演習の解答例の方法) に従え。また、任意定数の文字は s, t, \dots をこの順に用いよ。

- (17) 同次連立1次方程式
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$
 の係数行列の階数を求めよ。

(18) (17) の同次連立1次方程式を解け。

- (19) 連立1次方程式
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 = 3 \\ x_1 + kx_2 - 5x_3 = -2 \end{cases}$$
 が無数の解をもつための定数 k の条件を求めよ。

(20) k が (19) の条件を満たすとき、(19) の連立1次方程式を解け。