数学演習第一・期末統一試験【解説】

2023 年 7 月 26 日実施 ・ 試験時間 90 分

1 n を自然数とするとき, 次の問いに答えよ. 但し, 解答は n で場合分けせず, 整理された形で書くこと.

(1) $f(x)=(x+1)e^{3x}$ の n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とするとき，$f^{(n)}(0)$ を求めよ.

【答】 ライプニッツの公式より，$f^{(n)}(x)=(x+1)3^n e^{3x}+n3^{n-1}e^{3x}$. よって，$f^{(n)}(0)=\boxed{(n+3)3^{n-1}}$.

[別法] $e^{3x}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{k!}x^k+o(x^n)$ より，$f(x)=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{3^k}{k!}+\frac{3^{k-1}}{(k-1)!}\Big)x^k+o(x^n)$.

よって，$\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{3^n}{n!}+\dfrac{3^{n-1}}{(n-1)!}$ となるから，$f^{(n)}(0)=\boxed{(n+3)3^{n-1}}$.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+x}$ の n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とするとき，$f^{(n)}(-1)$ を求めよ.

【答】 部分分数分解すると $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{2x+1}$ となるので，$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}-\dfrac{2(-1)^n n!\cdot 2^n}{(2x+1)^{n+1}}$.

よって，$f^{(n)}(-1)=\boxed{(2^{n+1}-1)n!}$.

2 次の関数 $f(x)$ について, $x=0$ における 3 次の漸近展開 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3)$ $(x\to 0)$ の各次の係数を $\underline{(a_0,a_1,a_2,a_3)\text{ の形で}}$ 記せ. 例えば，$f(x)=1-2x^2+x^3+o(x^3)$ $(x\to 0)$ なら, $(1,0,-2,1)$ となる.

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$

【答】 $\dfrac{1}{1+x+x^2}=1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x+x^2)^3+o(x^3)=1-x+x^3+o(x^3)$ より，

$(a_0,a_1,a_2,a_3)=\boxed{(1,\,-1,\,0,\,1)}$.

[別法] $(1+x+x^2)f(x)=1$ より，$(1+x+x^2)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3))=1$.

展開して 3 次までの係数を比較すると，$a_0=1,\ a_0+a_1=0,\ a_0+a_1+a_2=0,\ a_1+a_2+a_3=0$.

よって，$(a_0,a_1,a_2,a_3)=\boxed{(1,\,-1,\,0,\,1)}$.

(4) $f(x)=e^{-x}\sqrt{\cos x}$

【答】
$$\begin{aligned}f(x)&=\Big(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\Big)\Big(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\Big)^{\frac{1}{2}}\\&=\Big(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\Big)\Big(1-\frac{1}{4}x^2+o(x^3)\Big)\\&=1-x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

よって，$(a_0,a_1,a_2,a_3)=\boxed{\Big(1,\,-1,\,\dfrac{1}{4},\,\dfrac{1}{12}\Big)}$.

(5) $f(x)=\log\big(1+\mathrm{Sin}^{-1}x\big)$

【答】 $\big(\mathrm{Sin}^{-1}x\big)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$, $\mathrm{Sin}^{-1}0=0$ より，$\mathrm{Sin}^{-1}x=x+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$ だから，

$$\begin{aligned}f(x)&=\Big(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\Big)-\frac{1}{2}\Big(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\Big)^2+\frac{1}{3}\Big(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\Big)^3+o(x^3)\\&=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

よって，$(a_0,a_1,a_2,a_3)=\boxed{\Big(0,\,1,\,-\dfrac{1}{2},\,\dfrac{1}{2}\Big)}$.

$\boxed{3}$ (6) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2(1-\cosh x)}{(1-\cos x)^2}$ を求めよ.

【答】 分母は $(1-\cos x)^2=\left(\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)^2=\frac{1}{4}x^4+o(x^4)$ だから，分子の 4 次の漸近展開を考えると，

$x\sin x+2(1-\cosh x)=x\Big(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\Big)+2\Big(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\Big)=-\frac{1}{4}x^4+o(x^4)$.

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2(1-\cosh x)}{(1-\cos x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}x^4+o(x^4)}{\frac{1}{4}x^4+o(x^4)}=\boxed{-1}$.

$\boxed{4}$ 次の定積分の値を求めよ.

(7) $\displaystyle\int_1^4\frac{dx}{2(x+\sqrt{x})}$

【答】 $t=\sqrt{x}$ とおくと，$x=t^2, dx=2tdt$ より，$\displaystyle\int_1^4\frac{dx}{2(x+\sqrt{x})}=\int_1^2\frac{dt}{1+t}=\big[\log(1+t)\big]_1^2=\boxed{\log\frac{3}{2}}$.

(8) $\displaystyle\int_{-1}^0\mathrm{Cos}^{-1}\,x\,dx$

【答】 部分積分により，

$$\int_{-1}^0\mathrm{Cos}^{-1}\,x\,dx=\big[x\,\mathrm{Cos}^{-1}\,x\big]_{-1}^0+\int_{-1}^0\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\pi+\big[-\sqrt{1-x^2}\big]_{-1}^0=\boxed{\pi-1}.$$

(9) $\displaystyle\int_1^2\frac{2x-3}{x^2-2x+2}\,dx$

【答】
$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{2x-3}{x^2-2x+2}\,dx&=\int_1^2\frac{(x^2-2x+2)'}{x^2-2x+2}\,dx-\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^2+1}\\&=\big[\log(x^2-2x+2)\big]_1^2-\big[\mathrm{Tan}^{-1}(x-1)\big]_1^2=\boxed{\log 2-\frac{\pi}{4}}.\end{aligned}$$

(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{1+2\cos x}$

【答】 $t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ より，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{1+2\cos x}&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{2}{3-t^2}dt\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}+t}+\frac{1}{\sqrt{3}-t}\Big)dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\log\frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t}\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}\log 2}.\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ 次の行列に対して，<u>逆行列の第 3 行の行ベクトル</u>を求めよ

(11) $\begin{bmatrix}-1&1&0\\4&-3&2\\8&-5&7\end{bmatrix}$

【答】 行基本変形により，

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&0&1&0&0\\4&-3&2&0&1&0\\8&-5&7&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-1\times①}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&-1&0&0\\4&-3&2&0&1&0\\8&-5&7&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[③-8\times①]{②-4\times①}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&-1&0&0\\0&1&2&4&1&0\\0&3&7&8&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[③-3\times②]{①+②}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&3&1&0\\0&1&2&4&1&0\\0&0&1&-4&-3&1\end{array}\right]\xrightarrow[②-2\times③]{①-2\times③}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&11&7&-2\\0&1&0&12&7&-2\\0&0&1&-4&-3&1\end{array}\right].$$

よって, 逆行列の第 3 行は $\boxed{\begin{bmatrix}-4&-3&1\end{bmatrix}}$. (第 3 行を求めるだけなら，最後の行基本変形は不要.)

(12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

【答】 行基本変形により,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[③-2\times①]{②-2\times①} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[④+②]{③-2\times②} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)\times③]{②-2\times③,④+③} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[③-④]{①-3\times④} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

よって, 逆行列の第 3 行は $\boxed{\begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}}$.

$\boxed{6}$ (13) $f(x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \sin x & \cos x \\ \cos 2x & \cos x & -\sin x \\ \sin 2x & \cos x & \sin x \end{vmatrix}$ とおく. $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ を求めよ.

【答】 第 1 列に関する余因子展開により,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 2x \cdot 2\sin x\cos x - \cos 2x(\sin^2 x - \cos^2 x) + \sin 2x(-\sin^2 x - \cos^2 x) \\ &= \sin^2 2x + \cos^2 2x - \sin 2x \\ &= 1 - \sin 2x. \end{aligned}$$

よって, $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 1 - \dfrac{1}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

$\boxed{7}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ とし, $\widetilde{B}$ を B の余因子行列とするとき, 次の行列式の値を求めよ.

(14) $|A|$

【答】 サラスの公式を使って直接計算してもよいし, 次のように行基本変形と余因子展開を用いてもよい:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{-7}.$$

(15) $|\widetilde{B}|$

【答】 $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$ であり, $B\widetilde{B} = |B|E_3$ より

$|B||\widetilde{B}| = |B|^3$ だから, $|\widetilde{B}| = |B|^2 = \boxed{4}$.

(16) $|A\,{}^{\mathrm{t}}B|$

【答】 行列式の性質を用いて, $|A\,{}^{\mathrm{t}}B| = |A||{}^{\mathrm{t}}B| = |A||B| = \boxed{-14}$.

(17) $|C^{-1}|$

【答】 行基本変形により，

$$|C|=\begin{vmatrix}1&1&3&-1\\2&3&6&-2\\1&-2&5&0\\-1&4&-2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3&-1\\0&1&0&0\\0&-3&2&1\\0&5&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&3&-1\\0&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3$$

よって，$|C^{-1}|=|C|^{-1}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$.

$\boxed{8}$ 行列 $A=\begin{bmatrix}4&3&7\\3&2&7\\2&1&9\end{bmatrix}$ の余因子行列を $\widetilde{A}$ とするとき，次の問いに答えよ.

(18) $\widetilde{A}$ の $\underline{(1,2)\text{ 成分}}$を求めよ.

【答】
A の $(2,1)$ 余因子を求めればよいから，$-\begin{vmatrix}3&7\\1&9\end{vmatrix}=\boxed{-20}$.

(19) $\widetilde{A}$ の逆行列 $\widetilde{A}^{-1}$ の<u>第 3 行の行ベクトル</u>を求めよ.

【答】 $A\widetilde{A}=|A|E$ より，$\widetilde{A}^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$ であり

$$|A|=\begin{vmatrix}4&3&7\\3&2&7\\2&1&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\3&2&7\\2&1&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&-1&7\\0&-1&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&7\\-1&9\end{vmatrix}=-2$$

だから，$\widetilde{A}^{-1}$ の第 3 行の行ベクトルは，$\boxed{\begin{bmatrix}-1&-\dfrac{1}{2}&-\dfrac{9}{2}\end{bmatrix}}$.

$\boxed{9}$ (20) 行列式 $\begin{vmatrix}z&y&x\\z^2&y^2&x^2\\z^3&y^3&x^3\end{vmatrix}$ を<u>因数分解した形で</u>求めよ.

【答】 ヴァンデルモンドの行列式を利用して，

$$\begin{vmatrix}z&y&x\\z^2&y^2&x^2\\z^3&y^3&x^3\end{vmatrix}=xyz\begin{vmatrix}1&1&1\\z&y&x\\z^2&y^2&x^2\end{vmatrix}=\boxed{xyz(x-y)(x-z)(y-z)}.$$