数学演習第一・期末統一試験【問題用紙】

2023 年 7 月 26 日実施 ・ 試験時間 90 分

— 解答用紙には答えのみを整理された形で記入せよ —

1 n を自然数とするとき，次の問いに答えよ．但し，解答は n で場合分けせず，整理された形で書くこと．

(1) $f(x) = (x+1)e^{3x}$ の n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とするとき，$f^{(n)}(0)$ を求めよ．

(2) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+x}$ の n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とするとき，$f^{(n)}(-1)$ を求めよ．

2 次の関数 $f(x)$ について，$x=0$ における 3 次の漸近展開 $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3)\ (x\to 0)$ の各次の係数を $\underline{(a_0, a_1, a_2, a_3)\ \text{の形で}}$ 記せ．例えば，$f(x) = 1-2x^2+x^3+o(x^3)\ (x\to 0)$ なら，$(1, 0, -2, 1)$ となる．

(3) $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$ (4) $f(x) = e^{-x}\sqrt{\cos x}$ (5) $f(x) = \log\bigl(1+\mathrm{Sin}^{-1}\,x\bigr)$

3 (6) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+2(1-\cosh x)}{(1-\cos x)^2}$ を求めよ．

4 次の定積分の値を求めよ．

(7) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{2(x+\sqrt{x})}$ (8) $\displaystyle\int_{-1}^0 \mathrm{Cos}^{-1}\,x\,dx$ (9) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x-3}{x^2-2x+2}\,dx$ (10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+2\cos x}$

5 次の行列に対して，<u>逆行列の第 3 行の行ベクトル</u>を求めよ．

(11) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ 8 & -5 & 7 \end{bmatrix}$ (12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

6 (13) $f(x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \sin x & \cos x \\ \cos 2x & \cos x & -\sin x \\ \sin 2x & \cos x & \sin x \end{vmatrix}$ とおく．$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ を求めよ．

7 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$，$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ とし，$\widetilde{B}$ を B の余因子行列とするとき，次の行列式の値を求めよ．

(14) $|A|$ (15) $|\widetilde{B}|$ (16) $|A\,{}^{\mathrm{t}}B|$ (17) $|C^{-1}|$

8 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ の余因子行列を $\widetilde{A}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(18) $\widetilde{A}$ の <u>$(1,2)$ 成分</u>を求めよ． (19) $\widetilde{A}$ の逆行列 $\widetilde{A}^{-1}$ の<u>第 3 行の行ベクトル</u>を求めよ．

9 (20) 行列式 $\begin{vmatrix} z & y & x \\ z^2 & y^2 & x^2 \\ z^3 & y^3 & x^3 \end{vmatrix}$ を<u>因数分解した形で</u>求めよ．