数学演習第二 （演習第１回）

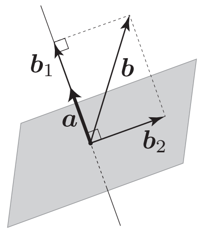
線形：前期線形の復習 (空間の直線と平面，内積・外積を含む)　2023 年 10 月 4 日

要点（内積・外積，空間の直線と平面）

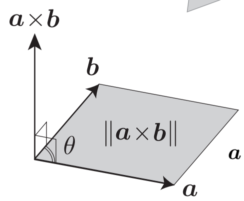
A 内積・外積 (線形 p.4, pp.7–8)

空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対して,

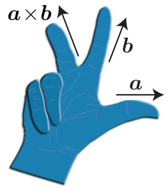
(1) $\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$, $\boxed{\|\boldsymbol{a}\| := \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の **内積**, $\boldsymbol{a}$ の **長さ** (**大きさ**, **ノルム**) という．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta \in [0, \pi]$ とすれば, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$ が成り立つ．(平面ベクトルに対しても同様)



(2) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$ $(\boldsymbol{b}_1 = t\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{a} = 0)$ の形に一意に分解できる (実際, $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{a} = t\|\boldsymbol{a}\|^2$ より t が定まり, $\boldsymbol{b}_1 = \dfrac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$ となる). このとき, $\boldsymbol{b}_1$ を $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に平行な直線」への**正射影** (または $\boldsymbol{a}$ への正射影), $\boldsymbol{b}_2$ を $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に垂直な平面」への正射影と呼ぶ.



(3) $\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の **外積** (= **ベクトル積**) と呼ぶ.



$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ が平行でないとき, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta \in (0, \pi)$ とすれば,

① $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方と垂直，　② $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は**右手系**,

③ $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$ $= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積).

なお, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が**右手系** (をなす) とは, 右手の親指, 人差し指, 中指の 3 本だけを立てたとき, 3 本の指が指す方向をこの順に $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の方向に合わせることができることをいう．行列式を用いれば, $\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{bmatrix} > 0$ であることに他ならない.

B 面積・体積 (線形 p.6, p.8, pp.85–86)

(1) 平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して,

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 $S = \left|\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}\right| \left(= \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}\,\right)$.

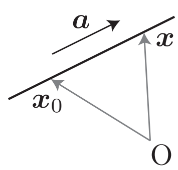
(2) 空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して,

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 $S = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| \left(= \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}\,\right)$,

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 $V = \left|\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{bmatrix}\right| \ \left(= |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|\,\right)$.

C 空間内の直線と平面 (線形 pp.10–13)

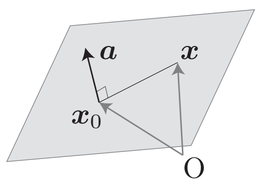
空間の点 $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ に対して,



(1) 点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{a}$ を**方向ベクトル**とする直線 ($\boldsymbol{a}$ に平行な直線) の方程式は,

$$\underset{\text{(ベクトル方程式)}}{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}} \quad \left(\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \right) \quad \text{より,} \quad \boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}.$$

(右の表現は $abc \neq 0$ の場合の形．例えば $ab \neq 0, c = 0$ なら, $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}, z = z_0$ となる.)



(2) 点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{a}$ を**法線ベクトル**とする平面 ($\boldsymbol{a}$ に垂直な平面) の方程式は,

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0, \quad \text{すなわち} \quad \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}.$$

(右の表現は通常 $ax + by + cz + d = 0$ または $ax + by + cz = d$ の形に整理する.)

演習問題 a（内積・外積，空間の直線と平面）

a1 (1) $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, $\|\boldsymbol{u}\|$, $\|\boldsymbol{v}\|$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ のなす角, $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ への正射影を求めよ. 更に, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の作る平行四辺形の面積を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に平行な直線」への正射影 $\boldsymbol{b}_1$ と, $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に垂直な平面」への正射影 $\boldsymbol{b}_2$ に対し, $\|\boldsymbol{b}_1\|$ と $\|\boldsymbol{b}_2\|$ を $\|\boldsymbol{a}\|, \|\boldsymbol{b}\|, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}, \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ を用いて表せ (要点 **A** (2) の説明も見よ).

(3) $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3)$ に余因子展開を適用して $\boxed{\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}}$ を示せ. 更に, この関係式を用いて, 次を示せ: ① $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = 0$, ② $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が 1 次独立ならば $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}] > 0$ (すなわち $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ が右手系).

(4) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, 3 次**直交行列** Q ($\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ${}^{t}QQ = Q\,{}^{t}Q = E$) に対して, $Q\boldsymbol{a} \cdot Q\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ (従って $\|Q\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a}\|$) 及び $Q\boldsymbol{a} \times Q\boldsymbol{b} = \pm Q(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ ($\pm$ は $\det Q \in \{\pm 1\}$ の符号を表す) を示せ.

a2 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ で, c は定数とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 1 つの式からなる連立 1 次方程式 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = c$ を解け.

(2) 連立 1 次方程式 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつための $\boldsymbol{b}$ の条件を $b_3 = (b_1, b_2$ の式) の形で表せ. (ヒント: まず, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を定めよ.)

(3) $\boldsymbol{b}$ が (2) の条件を満たすとき, 連立 1 次方程式 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解け.

a3 (1) **a1** (2) を利用して次を示せ.

(i) 点 $\boldsymbol{x}_1$ と要点 **C** (1) の直線の距離 (垂線の長さ) は $\dfrac{\|\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ で与えられる.

(ii) 点 $\boldsymbol{x}_1$ と要点 **C** (2) の平面 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$ との距離 (垂線の長さ) は $\dfrac{|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ で与えられる. 平面が $ax + by + cz + d = 0$ の形なら $\boxed{\dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$ (重要) となる.

(2) $\mathrm{A}(1, 1, -1)$, $\mathrm{B}(2, -2, 2)$, $\mathrm{C}(3, -1, 0)$, $\mathrm{D}(-1, 3, 3)$ とする.

(i) 直線 AB (2 点 A, B を通る直線) の方程式を求めよ.

(ii) 平面 ABC (3 点 A, B, C を通る平面) の方程式を求めよ. (まず法線ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ.) また, 点 D とこの平面の距離を求めよ.

(iii) 点 A を通る平面 ABC の法線 (ℓ とする) の方程式を求めよ. また, 点 D と直線 ℓ の距離を求めよ.

【注】(ii), (iii) の距離は, それぞれ点 D から平面 ABC, 直線 ℓ に下ろした垂線の長さに他ならない. この点に注目すれば (1) を利用しなくても計算できる (まず “垂線の足” の座標を求める).

(3) 直線 $\ell : \dfrac{x-4}{5} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+2}{-4}$ と平面 $\alpha : 5x - 4y - 3z = 5$ について考える.

(i) 直線 ℓ と平面 α の交点 $\boldsymbol{x}_0$ を求めよ.

(ii) 直線 ℓ を平面 α 上に正射影して得られる直線 m ($\boldsymbol{x}_0$ を通り, "ℓ の方向ベクトルの平面 α への正射影" を方向ベクトルとする直線) の方程式を求めよ.

(iii) 直線 ℓ と平面 α のなす角 (= 2 直線 ℓ, m のなす角) を求めよ.

(iv) 2 直線 ℓ, m を含む平面の方程式を求めよ.

(4) 2 直線 $\dfrac{x+c}{5} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-2}{4}$, $\dfrac{x+4}{5} = \dfrac{y-5}{-4} = \dfrac{z+1}{3}$ (c は定数) について考える.

(i) 2 直線のなす角を求めよ.

(ii) $c = -1$ のとき 2 直線は交わる. 2 直線の交点の座標と 2 直線を含む平面の方程式を求めよ.

(iii) $c = 14$ のとき 2 直線はねじれの位置にある (平行でなく共有点を持たない). 2 直線の共通垂線 (両方と垂直に交わる直線) の方程式を求めよ.

レポート課題

- **答だけでなく, 計算の過程も**書いて下さい. (**A 4 用紙 1 ～ 2 枚**にまとめて pdf ファイルに変換して提出)
- 授業に出席し, レポートを授業翌日までに WebClass に提出して「出席」となります.

I A$(1, 2, 0)$, B$(-1, 1, 3)$, C$(4, 4, 1)$ とする.

(1) $(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ. ただし, O は原点を表す.

(2) 平面 ABC の方程式を求めよ.

II 直線 $\ell : x - 1 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{3}$ と平面 $\alpha : 2x + y - z + 2 = 0$ について考える.

(3) 直線 ℓ と平面 α の交点 P の座標を求めよ.

(4) 直線 ℓ 上にあり, 平面 α との距離が $\sqrt{6}$ となる点を求めよ.

(5) ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ を平面 α に正射影して得られるベクトル $\boldsymbol{w}$ を求めよ.

演習問題 b （連立１次方程式，行列式の復習） —自習用—

b1 次の連立一次方程式に対して, 拡大係数行列を簡約化することにより解を求めよ.

(1) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -1 \\ 5x_1 + 10x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -3 \end{cases}$

b2 次の連立一次方程式が解を持つための a の条件を求めよ. また, そのときの解を求めよ.

(1) $\begin{cases} ax_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + (a+1)x_2 = 1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 5x_1 + 17x_2 - 13x_3 = 2 \\ 4x_1 + 14x_2 - 12x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = a \end{cases}$

b3 次の同次連立一次方程式が非自明な解を持つための a の条件を求めよ. また, そのときの解を求めよ.
(ヒント: (2) は係数行列の行列式を考えよ)

(1) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - (a-6)x_3 = 0 \\ 6x_1 + (a+3)x_2 + 6x_3 = 0 \\ ax_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

b4 次の行列の階数を求めよ. また正則な場合には逆行列を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 9 \\ 3 & 14 & 14 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

b5 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & -9 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix}$

b6 連立１次方程式 $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \\ a^3x + b^3y + c^3z = d^3 \end{cases}$ $(a, b, c, d$ は定数$)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 係数行列の行列式を計算し, 係数行列が正則となるための a, b, c の条件を求めよ.

(2) a, b, c が (1) で求めた条件を満たすとき, Cramer の公式を用いてこの連立１次方程式を解け.