

数学演習第二 (演習第1回) 【解答例】

線形：前期線形の復習 (空間の直線と平面, 内積・外積を含む) 2023年10月4日

演習問題 a

a1 (1) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{6}$. \mathbf{u}, \mathbf{v} のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) は,
 $\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{2}$ より, $\theta = \frac{\pi}{3}$. また, \mathbf{v} の \mathbf{u} への正射影は $\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. 更に, \mathbf{u}, \mathbf{v} の作る
 平行四辺形の面積は $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = 3\sqrt{3}$. ($\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sin \theta$ を計算してもよい.)

(2) $\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$ より, $\|\mathbf{b}_1\| = \frac{|\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|^2} \|\mathbf{a}\| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\|}$. また, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$ だから, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_2$.
 よって, $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}_2\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}_2\|$ (最後の等式で $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}_2$ を用いた). したがって, $\|\mathbf{b}_2\| = \frac{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{a}\|}$.
 また, $\|\mathbf{b}_2\| = \sqrt{\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{b}_1\|^2} = \frac{\sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}}{\|\mathbf{a}\|}$ と書くこともできる.

(3) $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ を第1列に関して余因子展開し, 外積の定義を用いて,

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \end{aligned}$$

また, $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]$ を第3列に関して余因子展開すれば, 同様な計算により $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ となり,

$$\boxed{\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}}$$

が得られる. (第二の等号については, 行列式の性質を用いて

$$\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = -\det[\mathbf{a} \ \mathbf{c} \ \mathbf{b}] = \det[\mathbf{c} \ \mathbf{a} \ \mathbf{b}] = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

と考えてもよい.) 上の関係式より, ① $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}] = 0$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = \det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{b}] = 0$ (同じ列を含む行列式の値は0). ② $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a} \times \mathbf{b}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 \geq 0$. あとは \mathbf{a}, \mathbf{b} が1次独立のとき $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ を示す必要があるが, 図形的に考えて $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ (\mathbf{a}, \mathbf{b} の作る平行四辺形の面積) より, これは明らか.

(4) 一般に $P\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot {}^tP\mathbf{b}$ が成り立つ. これを用いて, $Q\mathbf{a} \cdot Q\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot {}^tQQ\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. 更に, $\forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$(Q\mathbf{a} \times Q\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det[Q\mathbf{a} \ Q\mathbf{b} \ Q{}^tQ\mathbf{c}] = (\det Q) \det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ {}^tQ\mathbf{c}] = \pm(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot {}^tQ\mathbf{c} = \pm Q(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

であるから, $Q\mathbf{a} \times Q\mathbf{b} = \pm Q(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ が従う.

a2 (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = c$ に対する拡大係数行列 $[1 \ -2 \ 3 \ c]$ は簡約行列であり, これより求める解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a} \text{ に垂直}} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

(2) $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z - 3y \\ 3x - z \\ y + 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ より, $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とおけば, $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ は

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と書ける. ここで, $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつための条件を調べるために, $[A \ \mathbf{b}]$ に行基本変形を施す:

$$\begin{aligned} [A \ \mathbf{b}] &= \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 & b_1 \\ 3 & 0 & -1 & b_2 \\ 2 & 1 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 & b_1 \\ 1 & -1 & -1 & b_2 - b_3 \\ 2 & 1 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & b_2 - b_3 \\ 0 & -3 & -2 & b_1 \\ 0 & 3 & 2 & -2b_2 + 3b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & b_2 - b_3 \\ 0 & -3 & -2 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 - 2b_2 + 3b_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

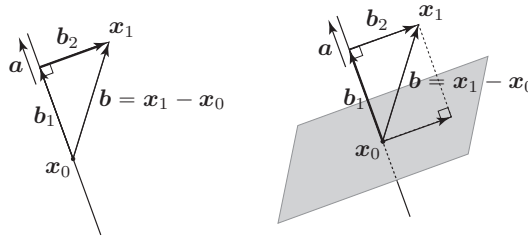
よって, 解をもつための条件は $\underbrace{b_1 - 2b_2 + 3b_3}_{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0} = 0$, すなわち $b_3 = \frac{-b_1 + 2b_2}{3}$ が成り立つこと.

(3) (2) の条件が満たされる時、上の基本変形を続けて、

$$[A \quad \mathbf{b}] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{3}b_2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}b_2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって、 $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}b_2 \\ -\frac{1}{3}b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}b_2 \\ -\frac{1}{3}b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a} \text{ に平行}} \quad (t_1 \text{ は任意定数}).$

- a3** (1) (i) 点 \mathbf{x}_1 と **c**(1) の直線との距離は **a1**(2) で $\mathbf{b} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ と考えたときの $\|\mathbf{b}_2\|$ に等しい(下左図). よって、求める距離は $\frac{\|\mathbf{a} \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{a}\|}$. (“垂線の足”は $\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}_1 = \mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$.)
- (ii) 点 \mathbf{x}_1 と **c**(2) の平面との距離は **a1**(2) で $\mathbf{b} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ と考えたときの $\|\mathbf{b}_1\|$ に等しい(下右図). よって、求める距離は $\frac{|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{a}\|}$. (“垂線の足”は $\mathbf{x}_1 - \mathbf{b}_1 = \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$.) 平面が $ax + by + cz + d = 0$ と表されるなら $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_0 + d = 0$ であるから、 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_1 + d$ となり、距離は $\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ と表される.



(2) (i) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ が直線 AB の方向ベクトルを与えるので、直線 AB の方程式は $x - 1 = \frac{y - 1}{-3} = \frac{z + 1}{3}$.

(ii) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ が平面 ABC の法線ベクトルだから、平面 ABC の方程式は

$$3(x - 1) + 5(y - 1) + 4(z + 1) = 0. \quad \text{これを整理して、} \quad 3x + 5y + 4z = 4.$$

次に、(1) の (ii) を利用するために、 $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (A の位置ベクトル)、 $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ (D の位置ベクトル)、 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

(平面 ABC の法線ベクトル) とおけば、点 D と平面 ABC の距離は $\frac{|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{20}{\sqrt{50}} = 2\sqrt{2}$.

(iii) (ii) と同じ意味で $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}$ を用いる. 直線 ℓ は点 A を通り、 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから、その方

程式は $\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 1}{5} = \frac{z + 1}{4}$. また、 $\mathbf{a} \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ より、(1) の (i) を用い

て、点 D とこの直線の距離は $\frac{\|\mathbf{a} \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{4\sqrt{50}}{\sqrt{50}} = 4$.

【注】 (ii), (iii) の距離は D から平面、直線に下ろした垂線の長さである. (ii) では D から平面 ABC に垂線 DE を下ろせば、 $E(-1 + 3t, 3 + 5t, 3 + 4t)$ が $3x + 5y + 4z = 4$ 上にあるから $t = -\frac{2}{5}$ となり、 $\|\overrightarrow{DE}\| = 2\sqrt{2}$. (iii) では D から “A を通る平面 ABC の法線” に垂線 DF を下ろせば、 $F(1 + 3u, 1 + 5u, -1 + 4u)$ が $\overrightarrow{DF} \perp \mathbf{a}$ を満たすから $u = \frac{2}{5}$ となり、 $\|\overrightarrow{DF}\| = 4$.

(3) (i) 直線 ℓ 上の点 $(5t + 4, 3t - 1, -4t - 2)$ を平面 α の方程式 $5x - 4y - 3z = 5$ に代入して、 $5(5t + 4) - 4(3t - 1) - 3(-4t - 2) = 5$ となり、 $t = -1$. よって、交点 \mathbf{x}_0 の座標は $(-1, -4, 2)$.

(ii) α の法線ベクトルが $\mathbf{a} := \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$, ℓ の方向ベクトルが $\mathbf{b} := \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ より、 \mathbf{b} の平面 α への正射影は

$$\mathbf{b} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{25}{50} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad \text{よって、直線 } m \text{ の方程式は } x + 1 = \frac{y + 4}{2} = \frac{z - 2}{-1}.$$

(iii) $\mathbf{c} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ が直線 m の方向ベクトルであるから、直線 l, m のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすれば、

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|}{\|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\|} = \frac{|5+6+4|}{\sqrt{50}\sqrt{6}} = \frac{15}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6}. \quad \left(\text{このとき, } \sin \theta = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \right)$$

【注】 一般に、2直線の方向ベクトルが \mathbf{b}, \mathbf{c} であるとき、この2直線のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) は「 \mathbf{b}, \mathbf{c} のなす角」または「 $\mathbf{b}, -\mathbf{c}$ のなす角」のいずれかで与えられる。従って、 $\cos \theta = \frac{|\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|}{\|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\|}$ が成り立つ。

(iv) 求める平面は \mathbf{x}_0 を通り、 $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとする。よって、方程式は

$$5(x+1) + (y+4) + 7(z-2) = 0, \quad \text{すなわち} \quad 5x + y + 7z = 5.$$

(4) 2直線の方向ベクトルは $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$. また、2直線上の点は $(5s-c, 3s+1, 4s+2), (5t-4, -4t+5, 3t-1)$

とおけることに注意する。

(i) 2直線のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすれば、 $\cos \theta = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{25}{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{2}. \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}.$

(ii) $c = -1$ のとき、 $(5s+1, 3s+1, 4s+2) = (5t-4, -4t+5, 3t-1) \Leftrightarrow (s, t) = (0, 1)$ より、2直線は

$(1, 1, 2)$ で交わる。よって、2直線を含む平面は点 $(1, 1, 2)$ を通り、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \\ -35 \end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ を法線ベクトル

とするから、その方程式は $5(x-1) + (y-1) - 7(z-2) = 0. \quad \therefore 5x + y - 7z + 8 = 0.$

(iii) $c = 14$ のとき、与えられた2直線と求める直線(共通垂線)の交点は

$$A(5s-14, 3s+1, 4s+2), \quad B(5t-4, -4t+5, 3t-1)$$

とおける。 \overrightarrow{AB} は \mathbf{a}, \mathbf{b} の両方と垂直であるから、 $\overrightarrow{AB} \parallel \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. よって、 $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -5s+5t+10 \\ -3s-4t+4 \\ -4s+3t-3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$

を満たす k が存在する。これより、 $s = 1, t = 0, k = 1$. よって、 $B(-4, 5, -1)$ となるから、求める直線の方

程式は $\frac{x+4}{5} = y-5 = \frac{z+1}{-7}.$

レポート課題

I (1) $(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA} \quad \overrightarrow{OB} \quad \overrightarrow{OC}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{15}.$

(2) 平面 ABC の法線ベクトルは、 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \\ -1 \end{bmatrix}.$

A を通るから、求める方程式は $-7(x-1) + 11(y-2) - z = 0$, すなわち $\boxed{7x - 11y + z + 15 = 0}.$

II (3) 直線 l 上の点は $\begin{bmatrix} t+1 \\ 2t \\ 3t+2 \end{bmatrix}$ (t は実数) と書ける。これを平面 α の方程式に代入して、 $2(t+1) + 2t - (3t+2) + 2 = 0$.

よって $t = -2$ となるから、 $\boxed{P(-1, -4, -4)}.$

(4) 点と平面の距離の公式より、直線 l 上の点 $\begin{bmatrix} t+1 \\ 2t \\ 3t+2 \end{bmatrix}$ と平面 α との距離は $\frac{|t+2|}{\sqrt{6}}$. よって $|t+2| = 6$ より

$t = 4, -8$ となるから、求める点は $\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} -7 \\ -16 \\ -22 \end{bmatrix}.$

(5) 平面 α の法線ベクトルは $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ だから、 $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} = \mathbf{v} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$

演習問題 b

b1 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 10 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -10 \\ 2 & 5 & -4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & 9 & -10 & 25 \\ 0 & 10 & -7 & 36 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & 10 & -7 & 36 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -37 & -74 \end{bmatrix}$
 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & 10 & 6 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -14 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b2 (1) 係数行列の行列式は $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & a+1 \end{vmatrix} = a^2 + a - 6 = (a+3)(a-2)$. よって,

• $a \neq -3, 2$ ならば, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & a+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(a+3)(a-2)} \begin{bmatrix} a+1 & -2 \\ -3 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a-2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

• $a = -3$ ならば, $3x_1 - 2x_2 = 1$ となり, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. • $a = 2$ ならば解なし.

解をもつ条件は $a \neq 2$.

(2) $\begin{bmatrix} 5 & 17 & -13 & 2 \\ 4 & 14 & -12 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 14 & -12 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & a-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 4 & a-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a-\frac{7}{2} \end{bmatrix}$

より, 解をもつ条件は $a = \frac{7}{2}$. このとき, 解は $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b3 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 8 & -7 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 16 & -14 \\ 0 & 4 & a-3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & a-3 \\ 0 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & a-3 \\ 0 & 0 & -2a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 非自明な解をもつ条件は $a = -\frac{1}{2}$.

このとき, $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるので, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -10 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -(a-6) \\ 6 & a+3 & 6 \\ a & 3 & 3 \end{vmatrix} = (a-3)^2(a+3)$ より, 非自明な解をもつ条件は $a = \pm 3$. $a = 3$ のとき, (係数行列) $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

より, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. $a = -3$ のとき, (係数行列) $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b4 (1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 14 & 14 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 14 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ より, 階数は 3 で, 逆行列は $\begin{bmatrix} 0 & 14 & -9 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 3 (< 4) で, 逆行列は存在しない.

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より, 階数は 4 で, 逆行列は $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b5 (1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 11$. (2) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & -9 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} 2 \begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+3} 6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 12$.

(3) $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x+3a)(x-a)^3$.

(4) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} = \dots = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$.

b6 (1) $\Delta(a, b, c) := \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b) = \overbrace{abc(a-b)(b-c)(c-a)}^{a, b, c \text{ は } 0 \text{ でなく, 互いに異なる}} \neq 0$.

(2) $x = \frac{\Delta(d, b, c)}{\Delta(a, b, c)} = \frac{dbc(d-b)(b-c)(c-d)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{d(d-b)(c-d)}{a(a-b)(c-a)}$, $y = \frac{d(a-d)(d-c)}{b(a-b)(b-c)}$, $z = \frac{d(b-d)(d-a)}{c(b-c)(c-a)}$.