数学演習第二（演習第２回）【解答例】

微積：前期微積の復習（広義積分を含む）　2023 年 10 月 11 日

演習問題 a

a1 $\dfrac{1}{x^s}$ $(x>0)$ の不定積分 (積分定数省略) は

$$0<s\neq 1 \text{ のとき } \int \frac{dx}{x^s} = \int x^{-s}\,dx = \frac{x^{1-s}}{1-s}, \quad s=1 \text{ のとき } \int \frac{dx}{x} = \log x.$$

これを用いて,

(1) $0<s\neq 1$ のとき $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \left[\frac{x^{1-s}}{1-s}\right]_{+0}^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-s} & (s<1) \\ \infty & (s>1) \end{cases}$,　$s=1$ のとき $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_{+0}^1 = \infty.$

(2) $0<s\neq 1$ のとき $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \left[\frac{x^{1-s}}{1-s}\right]_1^\infty = \begin{cases} \frac{1}{s-1} & (s>1) \\ \infty & (s<1) \end{cases}$,　$s=1$ のとき $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_1^\infty = \infty.$

a2 (1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\log x\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log x\right]_{+0}^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = 0 - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{4}{9}.$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \mathrm{Sin}^{-1}(2x-1)$ より,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \Big[\mathrm{Sin}^{-1}(2x-1)\Big]_{+0}^{1-0} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ より,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+x+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_0^\infty = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(4) $\displaystyle\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ より,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \left[\log\frac{x+1}{x+2}\right]_0^\infty = 0 - \log\frac{1}{2} = \log 2.$$

(5) $t=e^{nx}$ とおくと, $dx = \dfrac{dt}{nt}$, $1\leqslant t<\infty$ だから,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{nx}+1} = \int_1^\infty \frac{dt}{nt(t+1)} = \frac{1}{n}\int_1^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{n}\left[\log\frac{t}{t+1}\right]_1^\infty = \frac{1}{n}\log 2.$$

(6) $x^2=t$ とおけば $x\,dx = \dfrac{dt}{2}$ より,

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty te^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\left(\Big[-te^{-t}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}\,dt\right) = \frac{1}{2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^\infty = \frac{1}{2}.$$

(7) 部分積分を繰り返して,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx &= \Big[e^{-x}\sin x\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx \\ &= \Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx = 1 - \int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx.\end{aligned}$$

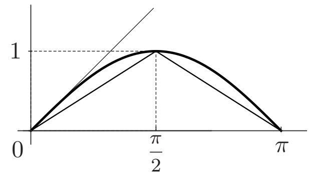
よって, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx \left(= \int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx\right) = \frac{1}{2}.$

(8) $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{(\cosh x)'}{\cosh x}$ より,

$$\int_0^\infty (1-\tanh x)\,dx = \Big[\,x - \log(\cosh x)\,\Big]_0^\infty = \lim_{x\to\infty}(x - \log(\cosh x))$$
$$= \lim_{x\to\infty}\log\frac{e^x}{\cosh x} = \lim_{x\to\infty}\log\frac{2}{1+e^{-2x}} = \log 2.$$

(9) $\dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{\cosh x}{\cosh^2 x} = \dfrac{(\sinh x)'}{1+\sinh^2 x}$ より, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\cosh x} \overset{\sinh x = t}{=} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\,\mathrm{Tan}^{-1}\,t\,\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$

$\boxed{\text{a3}}$ (1) まず, 区間 $(0,\pi)$ 上の正値連続関数 $\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$ は $x = \dfrac{\pi}{2}$ に関して対称であるから, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ が収束することを示せば十分. 次に, $0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ において $y = \sin x$ は上に凸ゆえ $0 < \dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x\ (\leqslant x)$ (右図参照), 従って $0 < \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.



ここで, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,dx \overset{\frac{2x}{\pi}=y}{=} \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \pi < \infty$ より $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ は収束する.

《別法》 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x} = 1$ であるから, 区間 $(0,a]$ $(a>0:$ 十分小$)$ において $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ が成り立つ. よって, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 < \infty$ から $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ が収束することが分かる (収束性が問題になるのは $x=0$ の近くのみ).

(2) $0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ において, $\sin x \geqslant \dfrac{2x}{\pi} > 0$ より $|\log(\sin x)| = -\log(\sin x) \leqslant -\log\dfrac{2x}{\pi}$ ($-\log x$ は単調減少関数). ここで,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(-\log\frac{2x}{\pi}\Big)\,dx \overset{\frac{2x}{\pi}=y}{=} -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \log y\,dy = \frac{\pi}{2} < \infty$$

であるから, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx$ は収束する. (値は $-\dfrac{\pi}{2}\log 2$ となることが知られている.)

《別法》 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\,\log(\sin x) = \lim_{x\to+0}\frac{\log(\sin x)}{x^{-1/2}} \overset{\text{ロピタル}}{=} \lim_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = -2\lim_{x\to+0}\Big(\frac{x}{\sin x}\cdot\sqrt{x}\,\cos x\Big) = 0$ であるから, 区間 $(0,a]$ $(a>0:$ 十分小$)$ において $|\log(\sin x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ が成り立つ. よって, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 < \infty$ から $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx$ が収束することが分かる (収束性が問題になるのは $x=0$ の近くのみ).

(3) $0 < x \leqslant 1$ において $\Big|\dfrac{\log x}{1+x^2}\Big| \leqslant |\log x|$ で, $\displaystyle\int_0^1 |\log x|\,dx = -\int_0^1 \log x\,dx = 1 < \infty$ であるから $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ は収束する. 次に, $x \geqslant 1$ において, $0 \leqslant \dfrac{\log x}{1+x^2} = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2} \leqslant \dfrac{C}{x^{3/2}}$ ($\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$ より, $x \geqslant 1$ において $0 \leqslant \dfrac{\log x}{\sqrt{x}} \leqslant {}^\exists C < \infty$) であり, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = 2 < \infty$ であるから $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ も収束する. よって,

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + \int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$$

は収束する. (実は, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx \overset{\frac{1}{x}=y}{=} \int_1^0 \frac{\log\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y^2}}\Big(-\frac{dy}{y^2}\Big) = -\int_0^1 \frac{\log y}{y^2+1}\,dy = -\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ であるから, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = 0$ と分かる.)

レポート課題

$\boxed{\text{I}}$ (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}} = \Big[2\sqrt{x}(\log x)^2\Big]_0^1 - 4\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx = -4\Big[2\sqrt{x}\log x\Big]_0^1 + 8\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 8\Big[2\sqrt{x}\Big]_0^1 = 16.$

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+3x} = \int_1^\infty \frac{dx}{x(x+3)} = \frac{1}{3}\int_1^\infty\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\Big) = \frac{1}{3}\Big[\log\frac{x}{x+3}\Big]_1^\infty = \frac{2}{3}\log 2.$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Sin}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 \mathrm{Sin}^{-1} x\,(\mathrm{Sin}^{-1} x)'\,dx = \left[\frac{1}{2}(\mathrm{Sin}^{-1} x)^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$

(4) $$\int_{\log 2}^{\infty} \frac{dx}{\sinh x} = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{\sinh x}{\cosh^2 x - 1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\log 2}^{\infty} \left(\frac{1}{\cosh x - 1} - \frac{1}{\cosh x + 1}\right)(\cosh x)'\,dx.$$
$$= \frac{1}{2}\left[\log \frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}\right]_{\log 2}^{\infty} = \log 3$$

II (1) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^s}dx = \int_1^{e} \frac{\log x}{x^s}dx + \int_e^{\infty} \frac{\log x}{x^s}dx$ と分ける．1 項目は通常の積分だから，2 項目が発散することを示せばよい．$x \geqslant e$ のとき，$\dfrac{\log x}{x^s} \geqslant \dfrac{1}{x^s}$ であり，$0 < s \leqslant 1$ のとき $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \infty$ だから，$\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{\log x}{x^s}dx = \infty$ となり，発散する．

(2) $s > 1$ のとき，$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^s}dx = \left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\log x\right]_1^{\infty} - \frac{1}{1-s}\int_1^{\infty} x^{-s}dx = -\frac{1}{1-s}\left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{(s-1)^2}.$

演習問題 b

b1 (1) $\sin\dfrac{12\pi}{11} = \sin\left(\pi - \dfrac{12\pi}{11}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{11}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{11}\right)\right) = \cos\dfrac{13\pi}{22}$ かつ $0 < \dfrac{13\pi}{22} < \pi$ であるから，$\mathrm{Cos}^{-1}\left(\sin\dfrac{12\pi}{11}\right) = \dfrac{13\pi}{22}.$

(2) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{15}$ とおけば $\tan\alpha = \sqrt{15}$ かつ $< \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. このとき, $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{16}$. $\cos\alpha > 0$ より $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$.

(3) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2}$, $\beta = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{7}$ とおけば, $0 < \dfrac{1}{7} < \dfrac{1}{2} < 1$ より $0 < \beta < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ となり, $0 < 2\alpha - \beta < \dfrac{\pi}{2}$. 一方, $\tan 2\alpha = \dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2} = \dfrac{4}{3}$, $\tan\beta = \dfrac{1}{7}$ より, $\tan(2\alpha-\beta) = \dfrac{\tan 2\alpha - \tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta} = 1$. よって, $2\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4}$.

b2 (1) $f'(x) = \dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{x^4+2x^2+2}.$

(2) $\log|x^3-3x+2| = 2\log|x-1| + \log|x+2|$ より, $n \geqslant 1$ に対して,
$$f^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+2)^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\left\{\frac{2}{(x-1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n}\right\}.$$

(3) ライプニッツの公式を用いて,
$$f^{(n)}(x) = x^2\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\pi\right) + 2nx\sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + n(n-1)\sin\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\pi\right)$$
$$= \{x^2 - n(n-1)\}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 2nx\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

b3 いずれも $x \to 0$ で考える.

(1) $e^{3x} = 1 + 3x + \dfrac{9}{2}x^2 + \dfrac{9}{2}x^3 + \dfrac{27}{8}x^4 + o(x^4)$, $\log(1+2x) = 2x - 2x^2 + \dfrac{8}{3}x^3 - 4x^4 + o(x^4)$ より, $e^{3x}\log(1+2x) = 2x + 4x^2 + \dfrac{17}{3}x^3 + 4x^4 + o(x^4).$

(2) $e^{x^2} = 1 + x^2 + \dfrac{1}{2}x^4 + o(x^4)$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{8}x^4 + o(x^4)$ より, $\dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{8}x^4 + o(x^4).$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ を積分して, $\log(x + \sqrt{1+x^2}\,) = x - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^4).$

b4 (1) $x \to 0$ のとき, $\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{120}x^5 + o(x^5)$, $e^{x^2} = 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2} + o(x^5)$ であるから,
$$\frac{6\sin x - 6x + x^3}{xe^{x^2} - x - x^3} = \frac{\frac{1}{20}x^5 + o(x^5)}{\frac{1}{2}x^5 + o(x^5)} \to \frac{1}{10}.$$

(2) $x \to 0$ のとき, $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$ を積分して, $\mathrm{Tan}^{-1} x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$. よって, $\dfrac{\mathrm{Tan}^{-1} x - x}{x^3} \to -\dfrac{1}{3}.$

(3) ロピタルの定理を用いて, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Tan}^{-1}(2x)}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+4x^2}}{3e^{3x}}=\frac{2}{3}$.

(4) $\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x)^x=x\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x)$ において, $x\to\infty$ のとき $\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x)\to\log\dfrac{\pi a}{2}\lesseqqgtr 0\ \left(a\lesseqqgtr\dfrac{2}{\pi}\right)$ であるから, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x)=-\infty\ (0<a<\tfrac{2}{\pi}),\ =\infty\ (a>\tfrac{2}{\pi})$. $a=\frac{2}{\pi}$ のときは不定形であり, ロピタルの定理により, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\log\Big(\frac{2}{\pi}\mathrm{Tan}^{-1}x\Big)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(\mathrm{Tan}^{-1}x)+\log\frac{2}{\pi}}{x^{-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\mathrm{Tan}^{-1}x}\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}}=-\frac{2}{\pi}$. よって求める極限値は $e^{-\frac{2}{\pi}}$.

(5) $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$ より $\dfrac{\tan x}{x}=1+\dfrac{1}{3}x^2+o(x^2)$. これと $\log(1+x)=x+o(x)$ とから, $\log\Big(\dfrac{\tan x}{x}\Big)^{1/x^2}=\dfrac{\log(1+\frac{1}{3}x^2+o(x^2))}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}{x^2}\to\dfrac{1}{3}$. よって, 求める極限値は $e^{1/3}$.

b5 (1) e^x を有限マクローリン展開すると, $\mathbb{R}$ 上で,

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_{n+1}(x),\quad R_{n+1}(x)=\frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!}\quad (0<{}^{\exists}\theta=\theta(x)<1).$$

$x\geqslant 0$ においては $R_{n+1}(x)\geqslant 0$ であるから, $\displaystyle e^x\geqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ が成り立つ.

(2) $\log(1+x)$ を有限マクローリン展開すると, $x>-1$ のとき,

$$\log(1+x)=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+R_{2n+1}(x),\quad R_{2n+1}(x)=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\theta x)^{2n+1}}\quad (0<{}^{\exists}\theta=\theta(x)<1).$$

$x\geqslant 0$ においては

$$0\leqslant R_{2n+1}(x)=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\theta x)^{2n+1}}\leqslant\frac{(-1)^{(2n+1)-1}}{2n+1}x^{2n+1}$$

であるから, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\leqslant\log(1+x)\leqslant\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$ が成り立つ.

b6 (1)
$$\begin{aligned}\int x^2\,\mathrm{Tan}^{-1}x\,dx&=\int\Big(\frac{x^3}{3}\Big)'\mathrm{Tan}^{-1}x\,dx=\frac{x^3}{3}\mathrm{Tan}^{-1}x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx\\&=\frac{x^3}{3}\mathrm{Tan}^{-1}x-\frac{1}{3}\int\Big(x-\frac{x}{1+x^2}\Big)dx=\frac{x^3}{3}\mathrm{Tan}^{-1}x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\log(1+x^2)+C.\end{aligned}$$

(2) $3x^2+x-2=t$ とおくと, $\displaystyle\int_1^2\frac{6x+1}{3x^2+x-2}dx=\int_2^{12}\frac{dt}{t}=\big[\log t\big]_2^{12}=\log 6$.

(3) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$ より,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{1+2\cos x}&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt3}}\frac{1}{1+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt3}}\frac{2\,dt}{3-t^2}\\&=\frac{1}{\sqrt3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt3}}\Big(\frac{1}{\sqrt3-t}+\frac{1}{\sqrt3+t}\Big)dt=\frac{1}{\sqrt3}\Big[\log\frac{\sqrt3+t}{\sqrt3-t}\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt3}}=\frac{\log 2}{\sqrt3}.\end{aligned}$$