数学演習第二 （演習第３回） 【解答例】

線形：ベクトル空間・部分空間　(2023 年 10 月 25 日実施)

演習問題

1 部分空間となる条件は, **【要点】の〈部分空間の条件〉(i), (ii), (iii)** を満たすことである．逆に言えば, 部分空間とならないことを示すには条件 (i), (ii), (iii) のいずれかひとつを満たさない具体的な反例をあげればよい．

(1) $\mathbf{0} \notin W$ なので部分空間ではない．

(2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$ だが, その 1/2 倍は $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \notin W$ なので部分空間ではない．

(3) $\mathbf{0} \in W$. $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in W$ のとき，$(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + 2y_1 + z_1) + (x_2 + 2y_2 + z_2) = 0$ なので，$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} \in W$．また，$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W$, $k \in \mathbb{R}$ に対し，$kx + 2(ky) + kz = k(x + 2y + z) = 0$ より，$k\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{bmatrix} \in W$．以上により条件 (i), (ii), (iii) の全てを満たすので, W は部分空間.

(4) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$ であるが, その和 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \notin W$ なので部分空間ではない．

(5) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$ であるが, その和 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$ なので部分空間ではない．

(6) (3) と同じようにして確認できるが, (3), (6) はいずれも同次形連立一次方程式の解空間なので部分空間である (教科書 **命題 15.4**).

(7) $\mathbf{0}$ が属していないので部分空間ではない．

(8) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ とおけば, $W = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3 \mid \text{連立一次方程式 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ が解 } \boldsymbol{x} \text{ を持つ}\}$ と表せる．まず, $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ より $\mathbf{0} \in W$. 次に, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}' \in W$ とすれば, W の定義により $A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{x}_0' = \boldsymbol{b}'$ を満たす $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_0' \in \mathbb{R}^3$ が存在する．このとき，

$$A(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_0') = A\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{x}_0' = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}', \quad A(k\boldsymbol{x}_0) = kA\boldsymbol{x}_0 = k\boldsymbol{b} \quad (k \in \mathbb{R})$$

であるから, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}'$ は解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1$ を持ち，$A\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{b}$ は解 $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x}_0$ を持つ．よって, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}'$, $k\boldsymbol{b} \in W$ $(k \in \mathbb{R})$ が示された．以上により, 条件 (i), (ii), (iii) の全てを満たすので, W は部分空間である．

2 (1) $\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & -9 & 2 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v} \notin W$, $\boldsymbol{w} \in W$.

(2) $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -9 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -22 & -24 \\ 0 & 1 & 5 & -22 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -22 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{array}\right]$ より,
$\boldsymbol{v} \in W$, $\boldsymbol{w} \notin W$.

(3) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 & b \\ 4 & 1 & 3 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 5 & -1 & b-2a \\ 0 & 5 & -1 & c-4a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 5 & -1 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & -b+c-2a \end{array}\right]$ より,
$\boldsymbol{v} \in W \iff 2a+b-c=0$.

(4) $\left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 6 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$ より,
$\boldsymbol{v} \in W$, $\boldsymbol{w} \notin W$.

(5) $\left[\begin{array}{cccc|cc} 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$
より, $\boldsymbol{v} \notin W$, $\boldsymbol{w} \in W$.

3 (1) W_1 は直線 $y=\dfrac{2}{3}x$ (図 1). W_2 は直線 $y=-x$ (図 2). 共通部分 $W_1 \cap W_2$ は 2 直線の交点の原点のみ (図 3). 和集合 $W_1 \cup W_2$ は 2 直線 $y=\dfrac{2}{3}x$, $y=-x$ の合併 (図 4). 和空間 W_1+W_2 は平面全体 (図 5). $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトルが W_1, W_2 に平行なベクトルの和で書けることは明らか (与えられたベクトルを対角線とし, W_1, W_2 に平行な辺をもつ平行四辺形を考えよ).

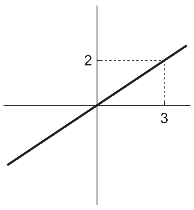

図 1. $W_1 : y=\dfrac{2}{3}x$

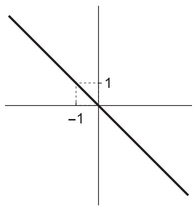

図 2. $W_2 : y=-x$

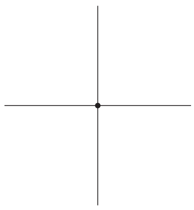

図 3. $W_1 \cap W_2$

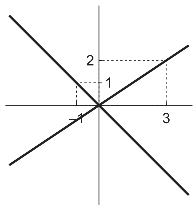

図 4. $W_1 \cup W_2$

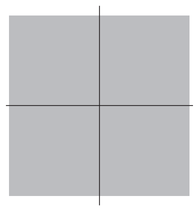

図 5. W_1+W_2

また, $W_1 \cup W_2$ が $\mathbb{R}^2$ の部分空間とならないことは, $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ が直線 $W_1 : y=\dfrac{2}{3}x$ 上にも直線 $W_2 : y=-x$ 上にもないため, $W_1 \cup W_2$ に属さないことからわかる.

(2) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$ となる条件は, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & -5 & z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & -6 & -x+z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & 2x+3y+z \end{bmatrix}$ より, $2x+3y+z=0$. つまり, W_1 は平面 $2x+3y+z=0$ を表している. 別の見方をすると, $W_1=\{c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ は, $\mathbb{R}^3$ 内で $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ によって張られる平面であるから, $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} /\!/ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとし, 原点を通る平面 $2x+3y+z=0$ となる.

同様に, W_2 についても, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 2 & z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 2 & x+z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & 3x-2y+z \end{bmatrix}$ より, W_2 は平面 $3x-2y+z=0$. 外積 $\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ からもわかる.

共通部分 $W_1 \cap W_2$ は連立一次方程式 $\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$ の解全体に一致するから,

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 13 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{13} \\ 0 & 1 & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$ から, $W_1 \cap W_2$ に属する元は $k\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 13 \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ となる. これは, 原点を通り, 方向ベクトル $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix}$ の直線 $\dfrac{x}{5} = y = \dfrac{z}{-13}$ である. 別の見方をすると, 2 つの平面 W_1, W_2 の交線は, W_1, W_2 の法線ベクトル $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4$ のいずれとも垂直であるから, $(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \times (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -26 \end{bmatrix} /\!/ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとし, 原点を通る直線 $\dfrac{x}{5} = y = \dfrac{z}{-13}$ となる.

また, $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & -5 & -1 & 2 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & 1 & x+y \\ 0 & -6 & -2 & 2 & -x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2x+3y+z \end{array}\right]$ から, $\mathbb{R}^3$ のどんなベクトルも $W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle$ に属することがわかるので, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$. なお, $W_1 \cup W_2$ が $\mathbb{R}^3$ の部分空間とならないことは, $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ が平面 $W_1 : 2x + 3y + z = 0$ 上にも平面 $W_2 : 3x - 2y + z = 0$ 上にもないため, $W_1 \cup W_2$ に属さないことからわかる.

レポート課題

(1) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 4z - 3y = 0 \\ 3x - 6z = 0 \\ 6y - 4x = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 6t \\ 4t \\ 3t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} \left(= \left\langle \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \right)$ と表される. $t = 0$ として, $\mathbf{0} \in W$. さらに, $t_1, t_2, k \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{bmatrix} 6t_1 \\ 4t_1 \\ 3t_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6t_2 \\ 4t_2 \\ 3t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(t_1+t_2) \\ 4(t_1+t_2) \\ 3(t_1+t_2) \end{bmatrix}, \quad k\begin{bmatrix} 6t_1 \\ 4t_1 \\ 3t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(kt_1) \\ 4(kt_1) \\ 3(kt_1) \end{bmatrix} \in W.$$

よって, W は条件 (i), (ii), (iii) を満たすので, $\mathbb{R}^3$ の部分空間である.

《別法 1》まず, $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in W$. 次に, $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in W$, $k \in \mathbb{R}$ とすれば,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(z_1+z_2) - 3(y_1+y_2) \\ 3(x_1+x_2) - 6(z_1+z_2) \\ 6(y_1+y_2) - 4(x_1+x_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4z_1 - 3y_1 \\ 3x_1 - 6z_1 \\ 6y_1 - 4x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4z_2 - 3y_2 \\ 3x_2 - 6z_2 \\ 6y_2 - 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \times k\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(kz_1) - 3(ky_1) \\ 3(kx_1) - 6(kz_1) \\ 6(ky_1) - 4(kx_1) \end{bmatrix} \\ &= k\begin{bmatrix} 4z_1 - 3y_1 \\ 3x_1 - 6z_1 \\ 6y_1 - 4x_1 \end{bmatrix} = k\left(\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right) = k\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるから, $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, k\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \in W$. よって, W は条件 (i), (ii), (iii) を満たすので, $\mathbb{R}^3$ の部分空間である. (上の証明は, 外積に関する演算法則 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{x}) = k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})$ を示すことも含んでいるので, これを既知とするなら証明はずっと短くなる.)

《別法 2》 $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ とおけば, $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ と書ける. よって, W は同次連立一次方程式の解空間であるから部分空間となる (教科書 命題 15.4).

(2) $x=y=z=0$ のとき $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \neq 1$ より, $\boldsymbol{0} \notin W$ となるので, W は部分空間ではない.

(3) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -2a+2 \\ 0 & 3 & -a+4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & -2a+2 \\ 0 & 0 & -7a+10 \end{array}\right]$ より, $\boldsymbol{v} \in W$ となる a は $a = \dfrac{10}{7}$.

(4)
- $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$ となる条件は, $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ -1 & -2 & y \\ 2 & 1 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & x+y \\ 0 & -1 & -2x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & x+y \\ 0 & 0 & -3x-y+z \end{array}\right]$ より, $3x+y-z=0$. つまり, W_1 は平面 $3x+y-z=0$ を表す. ($\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$ を用いてもよい)
- W_2 についても, 同様に $\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & x \\ 3 & 2 & y \\ 2 & 3 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & x \\ 1 & 1 & x+y \\ 2 & 3 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & 3x+2y \\ 0 & 1 & -2x-2y+z \end{array}\right] \to$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & 3x+2y \\ 0 & 0 & -5x-4y+z \end{array}\right]$ より, W_2 は平面 $5x+4y-z=0$ を表す. ($\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4$ を用いてもよい)
- 共通部分 $W_1 \cap W_2$ は連立一次方程式 $\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ 5x+4y-z=0 \end{cases}$ の解全体に一致する. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \to$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$ から, $W_1 \cap W_2$ に属する元は, $k\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ となる. よって, $W_1 \cap W_2$ は原点を通り, 方向ベクトル $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$ の直線 : $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{7}$ である.

  $\boxed{3}$ (2) の別解と同様に, 2 つの平面 W_1, W_2 の交線は $(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \times (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとし, 原点を通る直線と考えてもよい.
- 最後に, 和空間 $W_1 + W_2$, 和集合 $W_1 \cup W_2$ についても触れておく. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & x \\ -1 & -2 & 3 & 2 & y \\ 2 & 1 & 2 & 3 & z \end{array}\right] \to$ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & x \\ 0 & -1 & 1 & 1 & x+y \\ 0 & -1 & 6 & 5 & -2x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & x \\ 0 & -1 & 1 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 5 & 4 & -3x-y+z \end{array}\right]$ から, $\mathbb{R}^3$ のどんなベクトルも $W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle$ に属することがわかるので, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$. 一方, $W_1 \cup W_2$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間とならない. 実際, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3 \in W_1 \cup W_2$ であるが, $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ が平面 $W_1 : 3x+y-z=0$ 上にも平面 $W_2 : 5x+4y-z=0$ 上にもないため, $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 \notin W_1 \cup W_2$ となる.