2023年度数学演習第二　【解答例】

演習第４回　微積：偏微分［１］（偏微分，合成関数の微分）

2023 年 11 月 1 日　実施

1　演習問題の解答

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) $f_x(x,y) = 4xy^5 + 12x^3y^3,\ f_y(x,y) = 10x^2y^4 + 9x^4y^2,$

$f_{xx}(x,y) = 4y^5 + 36x^2y^3,\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 20xy^4 + 36x^3y^2,\ f_{yy}(x,y) = 40x^2y^3 + 18x^4y.$

(2) $f_x(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2y^3}},\ f_y(x,y) = \dfrac{3y^2}{\sqrt{x^2+2y^3}},$

$f_{xx}(x,y) = \dfrac{2y^3}{(x^2+2y^3)^{\frac{3}{2}}},\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\dfrac{3xy^2}{(x^2+2y^3)^{\frac{3}{2}}},\ f_{yy}(x,y) = \dfrac{6x^2y+3y^4}{(x^2+2y^3)^{\frac{3}{2}}}.$

(3) $f_x(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+2y},\ f_y(x,y) = \dfrac{2}{x^2+2y},$

$f_{xx}(x,y) = \dfrac{-2x^2+4y}{(x^2+2y)^2},\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\dfrac{4x}{(x^2+2y)^2},\ f_{yy}(x,y) = -\dfrac{4}{(x^2+2y)^2}.$

(4) $f_x(x,y) = y\cos(xy),\ f_y(x,y) = x\cos(xy),$

$f_{xx}(x,y) = -y^2\sin(xy),\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy),\ f_{yy}(x,y) = -x^2\sin(xy).$

(5) $(x,y) \neq (0,0)$ のとき, $(x^2+y^2)f = x^3y - xy^3$ の両辺を x で偏微分すると, $2xf + (x^2+y^2)f_x = 3x^2y - y^3$, $(x^2+y^2)^2 f_x = (3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x^2y(x^2-y^2)$ より, $f_x(x,y) = \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ が従う. 同様にして, $f_y(x,y) = \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ を得る. $(x,y) = (0,0)$ のとき, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ が定義から容易にわかる. 次に, 2 次偏導関数を計算する. $(x,y) \neq (0,0)$ のとき, $(x^2+y^2)^2 f_x = y(x^4+4x^2y^2-y^4)$ の両辺を x で偏微分すると, $4x(x^2+y^2)f_x + (x^2+y^2)^2 f_{xx} = 4xy(x^2+2y^2)$, $(x^2+y^2)^3 f_{xx} = 4xy\{(x^2+2y^2)(x^2+y^2) - (x^4+4x^2y^2-y^4)\}$ より, $f_{xx}(x,y) = \dfrac{4xy^3(-x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$ を得る. 同様にして, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \dfrac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} = \dfrac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}$, $f_{yy}(x,y) = \dfrac{4x^3y(-3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}$. $(0,0)$ での値を求めるために, 上の計算結果から, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, $f_x(x,0) = 0\ (x \neq 0)$, $f_x(0,y) = -y\ (y \neq 0)$, $f_y(x,0) = x\ (x \neq 0)$, $f_y(0,y) = 0\ (y \neq 0)$ であることに注意する. これらを用いて, $f_{xx}(0,0) = 0$, $f_{xy}(0,0) = -1$, $f_{yx}(0,0) = 1$, $f_{yy}(0,0) = 0$ が導かれる. よって, $f(x,y)$ は ((0,0) を除いた領域で C^2 級であるが) $(0,0)$ の近傍で C^2 級でない. $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ だが, 極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xx}(x,y)$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y)$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{yy}(x,y)$ はいずれも存在しない (平面の極座標を使えば示せる). ここでの $f(x,y)$ はイタリアの数学者ペアノ (Giuseppe Peano, 1858–1932) の有名な一例である.

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) (i) $g(t) = f(\varphi(t),\psi(t)) = t^2 \cdot \left(\dfrac{1}{t}\right)^2 + \dfrac{1}{t} = 1 + \dfrac{1}{t}$ より, $g'(t) = -\dfrac{1}{t^2}.$

(ii) $f_x(x,y)=y^2,\ f_y(x,y)=2xy+1,\ \varphi'(t)=2t,\ \psi'(t)=-\dfrac{1}{t^2}$ より, $z=g(t)$ とおくと,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d\psi}{dt} = f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) \\ &= \left(\frac{1}{t}\right)^2 \cdot 2t + \left(2t^2 \cdot \frac{1}{t} + 1\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right) = -\frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

以上よりどちらで計算しても結果は同じである.

(2) (i) $g(t)=f(\varphi(t),\psi(t))=\cos^2 t+\cos t\sin t+\sin^2 t=1+\cos t\sin t$ より,
$g'(t)=-\sin t\sin t+\cos t\cos t=\cos^2 t-\sin^2 t\,(=\cos 2t)$.

(ii) $f_x(x,y)=2x+y,\ f_y(x,y)=x+2y,\ \varphi'(t)=-\sin t,\ \psi'(t)=\cos t$ より, $z=g(t)$ とおくと,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d\psi}{dt} = f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) \\ &= (2\cos t + \sin t)(-\sin t) + (\cos t + 2\sin t)\cos t \\ &= -2\sin t\cos t - \sin^2 t + \cos^2 t + 2\sin t\cos t \\ &= \cos^2 t - \sin^2 t\,(=\cos 2t). \end{aligned}$$

以上よりどちらで計算しても結果は同じである.

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) (i) $g(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))=(u+v)^2(uv)^3+(u+v)+(uv)^2=u^5v^3+2u^4v^4+u^3v^5+u^2v^2+u+v$
より, $g_u(u,v)=5u^4v^3+8u^3v^4+3u^2v^5+2uv^2+1$.

(ii) $f_x(x,y)=2xy^3+1,\ f_y(x,y)=3x^2y^2+2y,\ \varphi_u(u,v)=1,\ \psi_u(u,v)=v$ より, $z=g(u,v)$ とおくと,

$$\begin{aligned} g_u(u,v) &= \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u} = f_x(\varphi(u,v),\psi(u,v))\varphi_u(u,v) + f_y(\varphi(u,v),\psi(u,v))\psi_u(u,v) \\ &= \{2(u+v)(uv)^3+1\}\cdot 1 + \{3(u+v)^2(uv)^2+2uv\}\cdot v \\ &= 5u^4v^3+8u^3v^4+3u^2v^5+2uv^2+1. \end{aligned}$$

以上よりどちらで計算しても結果は同じである.

(2) (i) $g(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))=(\sin u\cos v)^2+(\cos u\cos v)^2=\cos^2 v$ より, $g_u(u,v)=0$.

(ii) $f_x(x,y)=2x,\ f_y(x,y)=2y,\ \varphi_u(u,v)=\cos u\cos v,\ \psi_u(u,v)=-\sin u\cos v$ より, $z=g(u,v)$ とおくと,

$$\begin{aligned} g_u(u,v) &= \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u} = f_x(\varphi(u,v),\psi(u,v))\varphi_u(u,v) + f_y(\varphi(u,v),\psi(u,v))\psi_u(u,v) \\ &= 2\sin u\cos v\cos u\cos v + 2\cos u\cos v(-\sin u\cos v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

以上よりどちらで計算しても結果は同じである.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\dfrac{\partial x}{\partial u}=2u\cos(u^2-v),\ \dfrac{\partial x}{\partial v}=-\cos(u^2-v),\ \dfrac{\partial y}{\partial u}=-v^2e^{-uv^2},\ \dfrac{\partial y}{\partial v}=-2uve^{-uv^2}$ より,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} 2u\cos(u^2-v) & -\cos(u^2-v) \\ -v^2e^{-uv^2} & -2uve^{-uv^2} \end{pmatrix} = -\left(v^2+4u^2v\right)e^{-uv^2}\cos\left(u^2-v\right).$$

(2) $\dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{v}{\cos^2(uv)}$, $\dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{u}{\cos^2(uv)}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u} = \cos v$, $\dfrac{\partial y}{\partial v} = -u\sin v$, より,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{v}{\cos^2(uv)} & \dfrac{u}{\cos^2(uv)} \\ \cos v & -u\sin v \end{pmatrix} = -\frac{uv\sin v + u\cos v}{\cos^2(uv)}.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $z = f(x,y)$ とする.

(1) $f_x(x,y) = -\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$ より $f_x(2,2) = -2$. $f_y(x,y) = -\dfrac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$ より $f_y(2,2) = -2$.
よって求める接平面の方程式は $z-1 = -2(x-2)-2(y-2)$ を整理して $2x+2y+z=9$.
また求める法線の方程式は $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{2} = z-1$.

(2) $f_x(x,y) = -\dfrac{\dfrac{\pi x}{(x^2+y)^2}}{\cos^2\dfrac{\pi}{2(x^2+y)}}$ より $f_x(1,1) = -\dfrac{\pi}{2}$. $f_y(x,y) = -\dfrac{\dfrac{\pi}{2(x^2+y)^2}}{\cos^2\dfrac{\pi}{2(x^2+y)}}$ より $f_y(1,1) = -\dfrac{\pi}{4}$.
よって求める接平面の方程式は
$z-1 = -\dfrac{\pi}{2}(x-1) - \dfrac{\pi}{4}(y-1)$ を整理して $2\pi x + \pi y + 4z = 3\pi + 4$. また求める法線の方程式は
$\dfrac{x-1}{-\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{y-1}{-\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{z-1}{-1}$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ 一般に, 3 種類の極限には論理的な関係はないので, (a) の極限または (b) の極限が存在しないことから, (c) の極限が存在しないとは云えないし, (c) の極限が存在しても, (a) の極限や (b) の極限が存在すると結論付けられない.

(1) $\lim\limits_{y\to0}\Bigl(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\Bigr) = \lim\limits_{y\to0}(-1) = -1$, $\lim\limits_{x\to0}\Bigl(\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\Bigr) = \lim\limits_{x\to0} x = 0$. 一方, (x,y) を x 軸に沿って原点に近づけたときの $f(x,y)$ の極限 $\lim\limits_{x\to0} f(x,0) = 0$ と y 軸に沿って原点に近づけたときの極限 $\lim\limits_{y\to0} f(0,y) = -1$ が異なるので (c) の極限は存在しない.

(2) $\lim\limits_{y\to0}\Bigl(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\Bigr) = \lim\limits_{y\to0}\dfrac{0}{y^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to0}\Bigl(\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\Bigr) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x^2} = 0$. (c) の極限を調べるには本問では平面の極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ が有効で, このとき $(x,y)\to(0,0)$ は $r\to0$ と同じことなので, あたかも（θ をパラメータと見なして）r の 1 変数関数のように扱える. 実際, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと, $f(x,y) = \cos\theta\sin\theta = (1/2)\sin2\theta$ は区間 $[-1/2, 1/2]$ の任意の値を取り得るから, (c) の極限は存在しない.

(3) $\lim\limits_{y\to0}\Bigl(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\Bigr) = \lim\limits_{y\to0}\dfrac{0}{|y|} = 0$, $\lim\limits_{x\to0}\Bigl(\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\Bigr) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{|x|} = 0$. (c) の極限については (2) と同様に, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおいて, $|f(x,y)| = (r/2)|\sin2\theta| \leqq r/2 \to 0$ $(r\to0)$. よって, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(4) $|f(x,y)| \leqq |x| \leqq \sqrt{x^2+y^2}$ から, $\lim\limits_{y\to0}\Bigl(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\Bigr) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ がわかる. 一方, $x\neq0$ として, 例えば $y = 1/n\pi$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ を考えると, $n\to\infty$ のとき, $y = 1/(n\pi)\to+0$ で, $f(x, 1/(n\pi)) = (-1)^n x$ なので, $\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ $(x\neq0)$ は存在しない. よって, (b) の極限は存在しない.

【補足】 例えば, $\boxed{\mathbf{1}}$ (5) のような場面で, (a) や (b) の極限は自然に現れる. 実際, $\boxed{\mathbf{1}}$ (5) では

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\Bigl(\lim_{h\to 0}\frac{f(h,k)}{hk}\Bigr)=\lim_{k\to 0}\Bigl(\lim_{h\to 0}\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\Bigr)=-1,$$
$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\Bigl(\lim_{k\to 0}\frac{f(h,k)}{hk}\Bigr)=\lim_{h\to 0}\Bigl(\lim_{k\to 0}\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\Bigr)=1.$$

一般に, $g(tx,ty)=g(x,y)$ $(t\neq 0)$, $g(1,0)\neq g(0,1)$ をみたす $(x,y)\neq(0,0)$ での C^2 級関数 $g(x,y)$ を用いて, $f(x,y)=xy\,g(x,y)$ $((x,y)\neq(0,0))$, $=0$ $((x,y)=(0,0))$ と定めれば, $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ が成り立つ.

2 レポート課題の解答

問 $\boxed{1}$ (i) $g(t)=f(\varphi(t),\psi(t))=e^{\log t}\sin(\mathrm{Sin}^{-1}t)=t\cdot t=t^2$ より, $g'(t)=2t$.

(ii) $f_x(x,y)=e^x\sin y,\ f_y(x,y)=e^x\cos y,\ \varphi'(t)=\dfrac{1}{t},\ \psi'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ より,

$$\begin{aligned}g'(t)&=f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)=e^{\log t}\sin(\mathrm{Sin}^{-1}t)\cdot\frac{1}{t}+e^{\log t}\cos(\mathrm{Sin}^{-1}t)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\\&=t\cdot t\cdot\frac{1}{t}+t\sqrt{1-\sin^2(\mathrm{Sin}^{-1}t)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=t+t\sqrt{1-t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=t+t=2t.\end{aligned}$$

以上よりどちらで計算しても結果は同じである.

問 $\boxed{2}$ (i) $g(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))=\cos((u+v)uv)=\cos(u^2v+uv^2)$ より,
$g_v(u,v)=-(u^2+2uv)\sin(u^2v+uv^2)$.

(ii) $f_x(x,y)=-y\sin(xy),\ f_y(x,y)=-x\sin(xy),\ \varphi_v(u,v)=1,\ \psi_v(u,v)=u$ より, $z=g(u,v)$ とおくと,

$$\begin{aligned}g_u(u,v)&=f_x(\varphi(u,v),\psi(u,v))\varphi_v(u,v)+f_y(\varphi(u,v),\psi(u,v))\psi_v(u,v)\\&=-uv\sin((u+v)uv)\cdot 1-(u+v)\sin((u+v)uv)\cdot u=-(u^2+2uv)\sin(u^2v+uv^2).\end{aligned}$$

以上よりどちらで計算しても結果は同じである.

問 $\boxed{3}$ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}vu^{v-1} & u^v\log u\\ 2uv\cos(u^2v) & u^2\cos(u^2v)\end{pmatrix}=u^{v+1}v(1-2\log u)\cos(u^2v).$

問 $\boxed{4}$ $z=f(x,y)$ とおく. $f_x(x,y)=\dfrac{-\dfrac{y}{x^2}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f_y(x,y)=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ より

$f_x(1,1)=-\dfrac{1}{1^2+1^2}=-\dfrac{1}{2}$, $f_y(1,1)=\dfrac{1}{1^2+1^2}=\dfrac{1}{2}$.

よって求める法線の式は $\dfrac{x-1}{-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{y-1}{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{z-\dfrac{\pi}{4}}{-1}$.