数学演習第二（演習第５回）

線形：一次独立・一次従属, 基底と次元　2023 年 11 月 8 日

要点

〈１次独立・１次従属〉（**１次** は **一次** とも書く）

- $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が **１次独立**

  $\overset{\text{定義}}{\iff}$ $c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ を満たす $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ は $c_1 = \cdots = c_k = 0$ に限る.

  $\iff$ 同次連立１次方程式 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ は自明な解 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ のみをもつ.

  $\iff$ $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \end{bmatrix} = k$

- $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が **１次従属**

  $\overset{\text{定義}}{\iff}$ $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が１次独立でない. すなわち,
  $c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ を満たす $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ は $c_1 = \cdots = c_k = 0$ 以外にも存在する.

  $\iff$ 同次連立１次方程式 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ が非自明な解 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ をもつ.

  $\iff$ $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \end{bmatrix} < k$

- $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ が１次従属であるとき, 適当な $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ に対して $c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ が成立するが, これを **非自明な１次関係式** という. 非自明な１次関係式は同次連立１次方程式 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ を解くことによって求められる.

〈基底と次元〉

- ベクトル空間 V の元の組 $(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ が V の **基底**

  $\overset{\text{定義}}{\iff}$ 次の 2 つの条件を満たすこと:

  (i) $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成する. すなわち, $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$.

  (ii) $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は１次独立である.

  $\iff$ 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し, $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$ を満たす実数 $c_1, \dots, c_n$ が一意的に存在.
  (「存在する」が条件 (i) に, 「一意的に」が条件 (ii) に対応する.)

- ベクトル空間 V の基底の取り方は一意的ではないが, 基底をなすベクトルの個数は (有限個であれば) ただ１つに決まる. この個数をベクトル空間 V の **次元** といい, $\dim V$ で表す.

- $\mathbb{R}^n$ は n 次元なので, 基底は n 個のベクトルの組からなる. $(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ が $\mathbb{R}^n$ の基底となることは, $n \times n$ 行列 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}$ が正則行列となることと同値 (行列式の値が 0 でなければよい).

例 1　$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ について考える．行基本変形により，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

よって, $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = 3$ となり, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は１次独立．（行列式 $\neq 0$ を示してもよい.）

例 2　$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ について考える．行基本変形により，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & -7 & -21 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって, $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = 2$ となり, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は１次従属．また, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の解は $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c は任意定数) であるから, 非自明な１次関係式 $2\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ が成り立つ.

例 3　$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{aligned} x + 2y + 4z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ 5x + 4y + 2z &= 0 \end{aligned} \right\}$ を考える．行基本変形により，

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & -18 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -18 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 5x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$ の解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c は任意定数) より, $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ が W の基底で次元は 1.

演習問題

1　**〈数ベクトルの１次独立性の判定と非自明な１次関係式〉**　次のベクトルの組が１次独立かどうか判定し, １次従属の場合には, 非自明な１次関係式を１つ求めよ. (各問について, 与えられたベクトルを左から順に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots$ と名付けて解け.) ［演習書 問題 11.3.1 より］

(1) $\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -7 \\ 17 \end{bmatrix}$　　(4) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$　　(5) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

2 ［**1次独立性**］ ベクトル空間 V に属する4つのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が1次独立であるとする．次のベクトルの組は1次独立か否かを判定せよ．1次従属の場合には, 非自明な1次関係式を1つ求めよ．(各問で与えられたベクトルを前から順に $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots$ とする.) ［演習書 問題 11.3.3, 11.3.4 より］

(1) $\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2,\ \ 2\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3,\ \ 3\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_1$

(2) $\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2,\ \ 2\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3,\ \ 3\boldsymbol{a}_3 + 4\boldsymbol{a}_4,\ \ 4\boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_1$

(3) $\boldsymbol{a}_1 + \alpha\boldsymbol{a}_2,\ \ \boldsymbol{a}_2 + \alpha\boldsymbol{a}_3,\ \ \boldsymbol{a}_3 + \alpha\boldsymbol{a}_1\ \ (\alpha \in \mathbb{R}:$ 定数$)$

3 ［**数ベクトル空間の基底と次元**］ 次のベクトルの組のうち, $\mathbb{R}^3$ の基底になっているものをすべて答えよ．

$$\mathscr{B}_1 = \left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\right), \quad \mathscr{B}_2 = \left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right), \quad \mathscr{B}_3 = \left(\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right),$$

$$\mathscr{B}_4 = \left(\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right), \quad \mathscr{B}_5 = \left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}\right), \quad \mathscr{B}_6 = \left(\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right).$$

4 ［**部分空間の基底と次元**］ 次の4つの $\mathbb{R}^3$ の部分空間の基底と次元を求めよ．

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -2x + y + 3z = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rl} x + 2y + \ \ z &= 0 \\ -4x + 4y + 5z &= 0 \\ 2x \qquad\ \ - \ \ z &= 0 \end{array} \right\}, \quad W_4 = \left\{ \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{連立1次方程式} \\ \left\{\begin{array}{rl} x + 2y + \ \ z &= a \\ -4x + 4y + 5z &= b \\ 2x \qquad\ \ - \ \ z &= c \end{array}\right. \\ \hfill\text{が解をもつ} \end{array} \right\}$$

5 ［**部分空間の基底**］ $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\\4\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}4\\-1\\3\\2\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix}5\\4\\3\\-8\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix}3\\1\\2\\0\end{bmatrix} \right\rangle$$

について,

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の間に成り立つ非自明な1次関係式を1つ求めよ．

(2) 次のうち, W の基底となっているものをすべて選べ．

$$\mathscr{A}_1 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3), \quad \mathscr{A}_2 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4), \quad \mathscr{A}_3 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4), \quad \mathscr{A}_4 = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$$

(3) $\left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}4\\-1\\3\\3\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}2\\3\\1\\-4\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix}9\\-4\\7\\10\end{bmatrix}\right)$ は W の基底であることを示せ．

レポート課題

- **答だけでなく, 計算の過程も**書いて下さい. （A4 **用紙１〜２枚**にまとめ, pdf ファイルに変換して提出）
- 授業に出席し, レポートを授業翌日までに **WebClass に提出** して「出席」となります.

1 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$ (k は定数) について次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次従属となるための k の条件を求めよ. また, そのとき, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の満たす非自明な 1 次関係式を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ の次元を求めよ.

2 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V = \left\langle \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} \right\rangle$ の 1 組の基底と次元を求めよ.

3 $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} -2x + y + z - w = 0 \\ x + y - z + 2w = 0 \\ x - 2y - w = 0 \end{array} \right\}$$

の 1 組の基底と次元を求めよ.