数学演習第二 （演習第５回）【解答例】

線形：一次独立・一次従属, 基底と次元　(2023 年 11 月 8 日実施)

演習問題

1 (1) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 8 & -2 & -7 \\ 2 & -8 & 17 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 22 & -55 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は１次従属で, 非自明な１次関係式の１つは $\frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1 + \frac{5}{2}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$. 分母を払って $3\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}$ と表せば見やすい.

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & -2 & -4 & -18 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は１次従属で, 非自明な１次関係式の１つは $\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$. 勿論, $11\boldsymbol{a}_1 - 9\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ を挙げてもよい.

(5) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は１次独立.

(この変形の最後から２番目の行列を見れば, 階数が 4 なので, この段階で１次独立とわかる.)

2 (1)
$$\begin{aligned} c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 &= c_1(\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2) + c_2(2\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3) + c_3(3\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_1) \\ &= (c_1 + c_3)\boldsymbol{a}_1 + 2(c_1 + c_2)\boldsymbol{a}_2 + 3(c_2 + c_3)\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

とする. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は１次独立だから, $\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0, \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$ すなわち $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$. 基本変形により $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ であるから, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となり, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ は１次独立.

(2) (1) と同様に, $c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 + c_4\boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$. 係数行列を基本変形して, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. よって, $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ であるから, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ は１次従属で, 非自明な１次関係式 $\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{0}$ が成り立つ.

(3) (1) と同様に, $c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$. 係数行列を基本変形して, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -\alpha^2 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^3 + 1 \end{bmatrix}$. よって, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ は $\alpha = -1$ のとき１次従属で, 非自明な１次関係式 $\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0}$ が成り立つ. また, $\alpha \neq -1$ のときは１次独立となる.

3 $\mathbb{R}^3$ は 3 次元なので, 基底は 3 つのベクトルからなる．よって, $\mathscr{B}_1$ と $\mathscr{B}_6$ は基底ではない．また, $\mathscr{B}_3$ は $\mathbf{0}$ を含むので明らかに 1 次従属であり, 基底でない．$\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_4, \mathscr{B}_5$ に対しては, 行列式が 0 かどうかを調べればよい．

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

であるから, $\mathbb{R}^3$ の基底となっているのは $\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_4$ である．

4

- W_1 の元は $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}s + \frac{3}{2}t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \frac{s}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ と表せるので, $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$. この 2 つの列ベクトルは明らかに 1 次独立だから, $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ が W_1 の基底で, $\dim W_1 = 2$.

- W_2 の 3 つのベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ と書く．$[\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は 1 次独立で, 非自明な 1 次関係式 $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$ $(\Leftrightarrow \boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2)$ が成り立つ．よって, $W_2 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ となり, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ が基底で, $\dim W_2 = 2$.

- W_3 については, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 12 & 9 \\ 0 & -4 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & -4 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\dim W_3 = 1$ で, $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$ が基底となる．

- W_4 については, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ -4 & 4 & 5 & b \\ 2 & 0 & -1 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 12 & 9 & 4a+b \\ 0 & -4 & -3 & -2a+c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{12}(4a+b) \\ 0 & -4 & -3 & -2a+c \end{bmatrix} \to$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}(2a-b) \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{12}(4a+b) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}(-2a+b+3c) \end{bmatrix}$ より, $W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -2a+b+3c = 0 \right\}$ となるので, W_1 と同様に, $\dim W_4 = 2$ で, $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ が基底.

  【注意】一般に, $m \times n$ 行列 $A = [\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n]$ に対し, $\{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つ$\} \subset \mathbb{R}^m$ は, 第 7 回で見る A の列空間 $C(A) = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ に一致することが示せる．W_4 に対しては $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ となっており, これは W_3 で扱った行列と同じである．W_3 でみた簡約化の計算から, A の第 1 列と第 2 列のベクトルが $C(A)$ の基底となることがわかるので, $\dim W_4 = 2$ と基底 $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ が得られる．

$\boxed{5}$ (1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 14 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -14 & -28 & -12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

より, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は1次従属で, 非自明な1次関係式 $3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ が成り立つことがわかる.

(2) (1) から, $\mathscr{A}_1$ は基底にならない. 他方, 非自明な1次関係式を使うと, $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = (c_1 - 3c_3)\boldsymbol{a}_1 + (c_2 + 2c_3)\boldsymbol{a}_2 + c_4\boldsymbol{a}_4$ と書き直せるので, $\mathscr{A}_2 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4)$ は W を生成する. 同様に考えて, $\mathscr{A}_3, \mathscr{A}_4$ はいずれも W を生成することがわかる. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ のどの 2 つ $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j$ をとっても $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_4$ は1次独立であることがチェックできるので, $\mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3, \mathscr{A}_4$ はいずれも W の基底.

(3) 基底の定義に従って次の 3 つの項目をチェックする: (i) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が1次独立. (ii) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が W に属する. (iii) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が W を生成する.

(i) $[\boldsymbol{b}_1 \;\; \boldsymbol{b}_2 \;\; \boldsymbol{b}_3] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ -1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 3 & -4 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 14 & -7 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

より, $\operatorname{rank}[\boldsymbol{b}_1 \;\; \boldsymbol{b}_2 \;\; \boldsymbol{b}_3] = 3$ であるから成立.

(ii) $[\boldsymbol{a}_1 \;\; \boldsymbol{a}_2 \;\; \boldsymbol{a}_4 \mid \boldsymbol{b}_1 \;\; \boldsymbol{b}_2 \;\; \boldsymbol{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & -4 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 2 & 9 \\ 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 14 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -14 & -12 & -13 & -12 & -26 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

より, $\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4)$, $\boldsymbol{b}_2 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{b}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$ とそれぞれ表せることからわかる.

(iii) 逆に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ が $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の1次結合で表せることを示せばよい. これは

$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & -4 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 10 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 14 & -7 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 10 & -5 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

より, $\boldsymbol{a}_1 = -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{a}_2 = 6\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{a}_4 = -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$ と表せることからわかる.

【注意】 (i) は $U = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle$ が 3 次元で $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ がその基底であることを意味する. (ii) は $U \subset W$, (iii) は $U \supset W$ を意味する. (2) で $\dim W = 3$ であることがわかっているので, **教科書 命題 18.6** に注意すれば, (ii), (iii) のどちらか一方が言えれば, (i) と合わせて, $U = W$ であることが言え, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が W の基底とわかる.

レポート問題

1 (1) 行基本変形により, $[\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & -16 & k-8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & k+2 \end{bmatrix}$.

よって, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が１次従属となる条件は $k = -2$ (行列式 $= 8(k+2) = 0$ からも導かれる).

$k = -2$ のとき, 上の行基本変形を続けて, $\cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるので, 非自明な１次関係式は $-\frac{1}{8}\boldsymbol{a}_1 - \frac{5}{8}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$, あるいは $\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 - 8\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$.

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は明らかに１次独立であるから, $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ の次元は, $k = -2$ のとき 2 (基底は $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$), $k \neq -2$ のとき 3 (基底は $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ あるいは $(\underbrace{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3}_{\text{基本ベクトル}})$).

2 行基本変形により, $[\boldsymbol{b}_1 \ \ \boldsymbol{b}_2 \ \ \boldsymbol{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. これより, $\boldsymbol{b}_3 = -2\boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2$ であり, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ は明らかに１次独立であるから, $V = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle$ の基底は $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ であり, 次元は $\dim V = 2$.

3 行基本変形により, $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. これより, W の元は $\begin{bmatrix} \frac{2}{3}s - t \\ \frac{1}{3}s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \frac{s}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ と表せるので, W の１組の基底は $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ で, 次元は $\dim W = 2$.