数学演習第二（第６回） 【解答例】

微積：偏微分 [2] (テーラーの定理, 極値)　2023 年 11 月 15 日 実施

【演習問題】

1 原点 $(0,0)$ の近傍で定義された 2 変数関数 $f(x,y)$ が $(x,y)\to(0,0)$ において

$$f(x,y)=c_{00}+(c_{10}x+c_{01}y)+(c_{20}x^2+c_{11}xy+c_{02}y^2)+(c_{30}x^3+c_{21}x^2y+c_{12}xy^2+c_{03}y^3)+o((x^2+y^2)^{3/2})$$

の形に展開されるとすれば, 各項の係数は一意に定まる (漸近展開の一意性). 特に, $f(x,y)$ が C^3 級ならば, この形の展開がマクローリン展開の公式

$$\begin{aligned} f(x,y)&=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+\frac{1}{2}\Big(f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\Big)\\ &\quad+\frac{1}{6}\Big(f_{xxx}(0,0)x^3+3f_{xxy}(0,0)x^2y+3f_{xyy}(0,0)xy^2+f_{yyy}(0,0)y^3\Big)+o((x^2+y^2)^{3/2}) \end{aligned} \tag{$*$}$$

によって与えられる. (問題文では $o((x^2+y^2)^{3/2})$ の部分を $\cdots$ で表している.) これを用いれば問題の各関数の 3 次までの展開式は必ず求まるが, 漸近展開の一意性のおかげで, 0 の近傍で C^3 級の 1 変数関数 $\varphi(t)$ に対するマクローリン展開の公式

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)t+\frac{1}{2}\varphi''(0)t^2+\frac{1}{6}\varphi'''(0)t^3+o(t^3)\quad(t\to0)$$

を利用して, より単純な計算で展開式が得られることがある. 与えられた関数はそのような場合に該当する.

(1) $\sin t=t+o(t^2)$ に $t=xy$ を代入し, $\sin(xy)=xy+o((x^2+y^2)^2)=\underline{xy+o((x^2+y^2)^{3/2})}$

〈別解〉 f の 3 次までの偏導関数は以下の通り. $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入する.

$$f_x=y\cos(xy),\ \ f_y=x\cos(xy),\ \ f_{xx}=-y^2\sin(xy),\ \ f_{xy}=\cos(xy)-xy\sin(xy),\ \ f_{yy}=-x^2\sin(xy),$$
$$f_{xxx}=-y^3\cos(xy),\ \ f_{xxy}=-2y\sin(xy)-xy^2\cos(xy),\ \ f_{xyy}=-2x\sin(xy)-x^2y\cos(xy),\ \ f_{yyy}=-x^3\cos(xy).$$

(2) $\sqrt{1+s}$ のマクローリン展開式 $\sqrt{1+s}=1+(1/2)s-(1/8)s^2+o(s^2)$ $(s\to0)$, および $\log(1+t)$ のマクローリン展開式 $\log(1+t)=t-(1/2)t^2+(1/3)t^3+o(t^3)$ $(t\to0)$ にそれぞれ $s=2x^2$, $t=-y$ を代入して,

$$\sqrt{1+2x^2}=1+x^2+o(x^3)\quad(x\to0),\qquad \log(1-y)=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}+o(y^3)\quad(y\to0).$$

これらを掛け合わせて

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2x^2}\,\log(1-y)&=(1+x^2+o(x^3))\Big(-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}+o(y^3)\Big)\\ &=\boxed{-y-\frac{1}{2}y^2-x^2y-\frac{1}{3}y^3}+o((x^2+y^2)^{3/2})\quad((x,y)\to(0,0)).\end{aligned}$$

〈別解〉 f の 3 次までの偏導関数は $g(x)=\sqrt{1+2x^2}$, $h(y)=\log(1-y)$ とおいて,

$$f_x=g'h,\ f_y=gh',\ f_{xx}=g''h,\ f_{xy}=g'h',\ f_{yy}=gh'',\ f_{xxx}=g'''h,\ f_{xxy}=g''h',\ f_{xyy}=g'h'',\ f_{yyy}=gh'''$$

であり, ここで現れる導関数は次の通り:

$$g'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}},\ \ g''(x)=\frac{2}{(1+2x^2)^{3/2}},\ \ g'''(x)=-\frac{12x}{(1+2x^2)^{5/2}},$$
$$h'(y)=-\frac{1}{1-y},\ \ h''(y)=-\frac{1}{(1-y)^2},\ \ h'''(y)=-\frac{2}{(1-y)^3}.$$

あとは $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入すればよい.

(3) $(1+y)^x=\{e^{\log(1+y)}\}^x=e^{x\log(1+y)}$ において,

$$x\log(1+y)=x\Big(y-\frac{1}{2}y^2+o(y^2)\Big)=xy-\frac{1}{2}xy^2+o((x^2+y^2)^{3/2}).$$

よって, $t = x\log(1+y)$ を $e^t = 1 + t + \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ $(t \to 0)$ に代入して,

$$\begin{aligned}(1+y)^x = e^{x\log(1+y)} &= 1 + \left(xy - \frac{1}{2}xy^2 + o((x^2+y^2)^{3/2})\right) + o((x^2+y^2)^{3/2}) \\ &= \underline{1 + xy - \frac{1}{2}xy^2} + o((x^2+y^2)^{3/2}) \quad ((x,y) \to (0,0)).\end{aligned}$$

〈別解〉f の 3 次までの偏導関数は以下の通り. $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入する.

$$\begin{aligned}
f_x &= (1+y)^x \log(1+y), \quad f_y = x(1+y)^{x-1}, \\
f_{xx} &= (1+y)^x \bigl(\log(1+y)\bigr)^2, \quad f_{xy} = (1+y)^{x-1}\bigl(1 + x\log(1+y)\bigr), \quad f_{yy} = x(x-1)(1+y)^{x-2}, \\
f_{xxx} &= (1+y)^x \bigl(\log(1+y)\bigr)^3, \quad f_{xxy} = (1+y)^{x-1}\log(1+y)\bigl(2 + x\log(1+y)\bigr), \\
f_{xyy} &= (1+y)^{x-2}\bigl(2x - 1 + x(x-1)\log(1+y)\bigr), \quad f_{yyy} = x(x-1)(x-2)(1+y)^{x-3}.
\end{aligned}$$

(4) $a^{x+2y} = (e^{\log a})^{x+2y} = e^{(x+2y)\log a}$ であるから, $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)$ $(t \to 0)$ に $t = (\log a)(x+2y)$ を代入し, $|(x+2y)^3| \le 5^{3/2}(x^2+y^2)^{3/2}$ に注意して,

$$\begin{aligned}
a^{x+2y} &= 1 + (\log a)(x+2y) + \frac{1}{2}(\log a)^2(x+2y)^2 + \frac{1}{6}(\log a)^3(x+2y)^3 + o((x^2+y^2)^{3/2}) \\
&= \underline{1 + (\log a)(x+2y) + (\log a)^2\left(\frac{1}{2}x^2 + 2xy + 2y^2\right) + (\log a)^3\left(\frac{1}{6}x^3 + x^2y + 2xy^3 + \frac{4}{3}y^3\right)} \\
&\quad + o((x^2+y^2)^{3/2}) \quad ((x,y) \to (0,0)).
\end{aligned}$$

〈別解〉f の 3 次までの偏導関数は以下の通り. $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入する.

$$\begin{gathered}
f_x = (\log a)a^{x+2y},\ f_y = 2(\log a)a^{x+2y},\ f_{xx} = (\log a)^2 a^{x+2y},\ f_{xy} = 2(\log a)^2 a^{x+2y},\ f_{yy} = 4(\log a)^2 a^{x+2y}, \\
f_{xxx} = (\log a)^3 a^{x+2y},\quad f_{xxy} = 2(\log a)^3 a^{x+2y},\quad f_{xyy} = 4(\log a)^3 a^{x+2y},\quad f_{yyy} = 8(\log a)^3 a^{x+2y}.
\end{gathered}$$

(5) $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$, $h(y) = \mathrm{Tan}^{-1}\, y$ とおいて $f(x,y) = g(x)h(y)$ と書く. ここで, $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ であるから, $\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ を用いて,

$$g(x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2}x^2 + o(x^3))} = 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) + o(x^3) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

また, $h(y)$ については, $h'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + o(t^2)$ を $[0,\ y]$ 上で積分して,

$$h(y) = \mathrm{Tan}^{-1}\, y = \int_0^y h'(t)\,dt = y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3).$$

よって,

$$\frac{\mathrm{Tan}^{-1}\, y}{\cos x} = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)\left(y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3)\right) = \underline{y + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{3}y^3} + o((x^2+y^2)^{3/2}) \ \ ((x,y) \to (0,0)).$$

〈別解〉f の 3 次までの偏導関数は

$$\begin{gathered}
f_x = g'h,\quad f_y = gh',\quad f_{xx} = g''h,\quad f_{xy} = g'h',\quad f_{yy} = gh'', \\
f_{xxx} = g'''h,\quad f_{xxy} = g''h',\quad f_{xyy} = g'h'',\quad f_{yyy} = gh'''
\end{gathered}$$

であり, ここに現れる導関数は次の通り:

$$\begin{gathered}
g'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x},\quad g''(x) = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x},\quad g'''(x) = \frac{(5 + \sin^2 x)\sin x}{\cos^4 x}, \\
h'(y) = \frac{1}{1+y^2},\quad h''(y) = -\frac{2y}{(1+y^2)^2},\quad h'''(y) = -\frac{2(1-3y^2)}{(1+y^2)^3}.
\end{gathered}$$

あとは $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入すればよい.

(6) $g(t) = \sqrt{1 + e^{2t}}$ とおけば, $f(x,y) = g(xy)$ と書ける. ここで,

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)\ \ (t \to 0), \quad \sqrt{1+s} = 1 + \frac{1}{2}s - \frac{1}{8}s^2 + o(s^2)\ \ (s \to 0)$$

であるから,

$$1+e^{2t}=1+(1+2t+2t^2+o(t^2))=2(1+t+t^2+o(t^2)),$$

$$\sqrt{1+e^{2t}}=\sqrt{2}\sqrt{1+(t+t^2+o(t^2))}=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}(t+t^2)-\frac{1}{8}t^2+o(t^2)\right)=\sqrt{2}+\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{3t^2}{4\sqrt{2}}+o(t^2).$$

これに $t=xy$ を代入して, $\sqrt{1+e^{2xy}}=\underline{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}xy}+o((x^2+y^2)^{3/2})\ \ ((x,y)\to(0,0))$.

〈別解〉 f の 3 次までの偏導関数は

$$f_x=g'(xy)y,\ \ f_y=g'(xy)x,\ \ f_{xx}=g''(xy)y^2,\ \ f_{xy}=h(xy),\ \ f_{yy}=g''(xy)x^2,$$
$$f_{xxx}=g'''(xy)y^3,\ \ f_{xxy}=h'(xy)y,\ \ f_{xyy}=h'(xy)x,\ \ f_{yyy}=g'''(xy)x^3$$

と表される. ここで, $h(t)=tg''(t)+g'(t)$, $h'(t)=tg'''(t)+2g''(t)$. 更に,

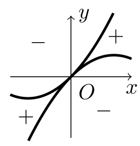
$$g'(t)=e^{2t}(1+e^{2t})^{-1/2},\ \ g''(t)=(2+e^{2t})e^{2t}(1+e^{2t})^{-3/2},\ \ g'''(t)=(4+2e^{2t}+e^{4t})e^{2t}(1+e^{2t})^{-5/2}.$$

あとは $(0,0)$ での値を計算し, $(*)$ に代入すればよい.

2 (1) $f(x,y)=\cos x+\cos y+2xy$. $f_x=2y-\sin x$, $f_y=2x-\sin y$ より, $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. $f_{xx}=-\cos x$, $f_{xy}=2$, $f_{yy}=-\cos y$ より, $D(0,0)=-3<0$. よって, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で 極値をとらない.

(2) $f(x,y)=x^2+y^4$. $(x,y)\neq(0,0)$ で $f(x,y)>0=f(0,0)$ となるので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で 極小値をとる.

(3) $f(x,y)=0$ を y について解くと $y=x\pm\frac{x^2}{\sqrt{2}}$ より, $f(x,y)=-2\big(y-(x+\frac{x^2}{\sqrt{2}})\big)\big(y-(x-\frac{x^2}{\sqrt{2}})\big)$ の正負は右図のようになり, $(0,0)$ で 極値をとらない(x,y いずれかの次数が 2 次以下なら有効な解法である).



(4) y について 2 次以下の項を (3) と同様に変形して, $f(x,y)=-2\big(y-(x+\frac{x^2}{\sqrt{2}})\big)\big(y-(x-\frac{x^2}{\sqrt{2}})\big)+y^4$. 右上図の $+$ の領域はこの関数でも正である一方, $y=-x$ 上では $|x|\neq 0$ が十分小さいとき $f(x,-x)=-8x^2+2x^4<0$. よって, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で 極値をとらない

3 (1) $f(x,y)=x^2-xy+y^2-x-4y$. $\begin{cases} f_x=2x-y-1=0 \\ f_y=-x+2y-4=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=\underline{(2,3)}$ (この点が極値を与える候補). $f_{xx}=2, f_{xy}=-1, f_{yy}=2$ より $D(2,3)=3>0$. よって, f は $\underline{(2,3)}$ で極小値 $\underline{f(2,3)=-7}$ をとる.

(2) $f(x,y)=x^2y-xy^2+x^2-xy+y^2+1$. $\begin{cases} f_x=2xy-y^2+2x-y=(y+1)(2x-y)=0 \\ f_y=x^2-2xy-x+2y=0 \end{cases}$ より, 第一式から $y=-1,2x$. 第二式から (i) $y=-1$ のとき, $x^2+x-2=0$ より, $\underline{(x,y)=(-2,-1),(1,-1)}$, (i) $y=2x$ のとき, $-3x^2+3x=0$ より, $\underline{(x,y)=(0,0),(1,2)}$ (この 4 点が極値を与える候補). $f_{xx}=2y+2$, $f_{xy}=2x-2y-1$, $f_{yy}=-2x+2$ より, $D(1,2)=f_{xx}(1,2)f_{yy}(1,2)-f_{xy}(1,2)^2=6\cdot 0-(-3)^2<0$, $D(1,-1)=0\cdot 0-3^2$, $D(-2,-1)=0\cdot 6-(-3)^2<0$ なので, $(1,2),(1,-1),(-2,-1)$ で f は極値を取らない. $D(0,0)=2\cdot 2-(-1)^2>0$, $f_{xx}(0,0)=2>0$ より, f は $\underline{(0,0)}$ で極小値 $\underline{f(0,0)=1}$ をとる.

(3) $f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$. $\begin{cases} f_x=\cos x-\cos(x+y)=0 \\ f_y=\cos y-\cos(x+y)=0 \end{cases}$ において 2 式の差をとり, $\cos x=\cos y$, $x,y\in(0,\pi)$ から $x=y$, よって $(x,y)=\underline{\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)}$ を得る (この点が極値を与える候補). $f_{xx}=-\sin x+\sin(x+y)$, $f_{xy}=\sin(x+y)$, $f_{yy}=-\sin y+\sin(x+y)$ なので, $D\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{9}{4}>0$, $f_{xx}\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}<0$ より $f(x,y)$ は $\underline{\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)}$ で極大値 $\underline{f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ をとる.

(4) $f(x,y)=\sin x\sin y$. $\begin{cases} f_x=\cos x\sin y=0 \\ f_y=\sin x\cos y=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=\underline{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}$ (この点が極値を与える候補). $f_{xx}=-\sin x\sin y$, $f_{xy}=\cos x\cos y$, $f_{yy}=-\sin x\sin y$ より, $D(x,y)=\sin^2 x\sin^2 y-\cos^2 x\cos^2 y$. $D\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=1>0$, $f_{xx}\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=-1<0$ より, $f(x,y)$ は $\underline{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}$ で極大値 $\underline{f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=1}$ をとる.

(5) $\begin{cases} f_x = \{1-(1/2)y(x+y)\}\,e^{-\frac{xy}{2}} = 0 \\ f_y = \{1-(1/2)x(x+y)\}\,e^{-\frac{xy}{2}} = 0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=(\pm1,\pm1)$ (この 2 点が極値を与える候補).

$$f_{xx} = -\frac{1}{4}\,y\{4-(x+y)y\}\,e^{-\frac{xy}{2}},\quad f_{xy} = -\frac{1}{4}(x+y)(4-xy)\,e^{-\frac{xy}{2}},\quad f_{yy} = -\frac{1}{4}\,x\{4-(x+y)x\}\,e^{-\frac{xy}{2}}$$

より, $D(\pm1,\pm1) = \left(\mp\frac{1}{2\sqrt{e}}\right)\left(\mp\frac{1}{2\sqrt{e}}\right) - \left(\mp\frac{3}{2\sqrt{e}}\right)^2 = -\frac{2}{e} < 0$. よって, f は$\underline{\text{極値をとらない}}$.

(6) $f(x,y) = x^5 - x^2y + y^2$. $\begin{cases} f_x = x(5x^3-2y) = 0 \\ f_y = -x^2+2y = 0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y) = \underline{(0,0),\ \left(\frac{1}{5},\frac{1}{50}\right)}$ (この 2 点が極値を与える候補). 2 次の偏導関数は $f_{xx} = 20x^3-2y$, $f_{xy} = -2x$, $f_{yy} = 2$.

(a) $D(0,0) = 0$ より, $D(0,0)$ からは極値判定できない. $f(x,y) = \left(y - \frac{x^2}{2}\right)^2 - x^4\left(\frac{1}{4} - x\right)$ と変形すれば $y = \frac{x^2}{2}$ 上で第 1 項が消えるので $f\left(t, \frac{t^2}{2}\right) = -t^4\left(\frac{1}{4} - t\right) < 0$ $\left(0 < |t| < \frac{1}{4}\right)$ であり, y 軸上で $f(0,y) = y^2 > 0$ $(y \neq 0)$ である. よって, f は $(0,0)$ で極値をとらない.

(b) $D\left(\frac{1}{5},\frac{1}{50}\right) = \frac{2}{25} > 0$, $f_{xx}\left(\frac{1}{5},\frac{1}{50}\right) = \frac{3}{25} > 0$ より, f は $\underline{\left(\frac{1}{5},\frac{1}{50}\right)\text{ で極小値 } f\left(\frac{1}{5},\frac{1}{50}\right) = -\frac{1}{12500}}$ をとる.

【レポート課題】

(1), (2) については $\boxed{1}$ の解答例も参照せよ. ランダウの記号で表した部分は $\cdots$ と書いてもよい.

(1) $e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$ $(t \to 0)$ より,

$$xe^y = x\left(1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\right) = x + xy + \frac{1}{2}xy^2 + o((x^2+y^2)^{3/2})$$

$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^2)$ $(t \to 0)$ に $t = x + xy + \frac{1}{2}xy^2 + o((x^2+y^2)^{3/2})$ を代入して,

$$\begin{aligned}\sin(xe^y) &= \left(x + xy + \frac{1}{2}xy^2 + o((x^2+y^2)^{3/2})\right) - \frac{1}{6}\left(x + xy + \frac{1}{2}xy^2 + o((x^2+y^2)^{3/2})\right) + o((x^2+y^2)) \\ &= \boxed{x + xy + \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}x^3} + o((x^2+y^2)^{3/2})\end{aligned}$$

(2) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ と, $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ に $t = xy$ を代入したものとを掛け合わせて,

$$e^x\log(1+xy) = \left(e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)\left(xy - \frac{1}{2}x^2y^2 + o((x^2+y^2)^{3/2})\right) = \boxed{xy + x^2y} + o((x^2+y^2)^{3/2})$$

(3) $f(x,y) = 5x^2 + 6xy + 2y^2 + 2x + 2y$ $\begin{cases} f_x = 10x + 6y + 2 = 2(5x+3y+1) = 0 \\ f_y = 6x + 4y + 2 = 2(3x+2y+1) = 0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y) = (1,-2)$ (この点が極値を与える候補). $f_{xx} = 10$, $f_{xy} = 6$, $f_{yy} = 4$, $D = f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = 4$ から, $D(1,-2) > 0$, $f_{xx}(1,-2) > 0$ より, f は$\boxed{(1,-2)\text{ では極小値 } 1 \text{ をとる}}$.

(4) $f(x,y) = (e^x - x)\cosh y$. $\begin{cases} f_x = (e^x-1)\cosh y = 0 \\ f_y = (e^x - x)\sinh y = 0. \end{cases}$ 解いて, $(x,y) = (0,0)$ (この点が極値を与える候補). $f_{xx} = e^x\cosh y$, $f_{xy} = (e^x-1)\sinh y$, $f_{yy} = (e^x-x)\cosh y$. $D(0,0) = 1\cdot1 - 0^2 > 0$, $f_{xx}(0,0) = 1 > 0$ より, f は $\boxed{(0,0)\text{ で極小値 } f(0,0) = 1}$ をとる.