# 数学演習第二 （演習第７回）

線形： 座標, 行列の零空間・行空間・列空間

2023 年 11 月 22 日

**要点**

**〈基底によるベクトルの座標〉** (線形教科書 pp. 119–120)

ベクトル空間 $V$ の基底 $\mathscr{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r)$ に対して, 各 $\boldsymbol{v} \in V$ は $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ の１次結合で１通りに表される:

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{b}_r = (\boldsymbol{b}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{b}_r)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}.$$

このとき一意に定まる列ベクトル $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r$ を $\boldsymbol{v}$ の基底 $\mathscr{B}$ に関する**座標**といい, $[\boldsymbol{v}]_{\mathscr{B}}$ で表す. $V$ が数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ (の部分空間) であれば, 座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathscr{B}}$ を求めるには非同次連立１次方程式

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_r \end{bmatrix}}_{n \times r \text{ 行列}}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}$$

を解けばよい.

**〈行列の零空間・行空間・列空間〉** (線形教科書 pp. 107, 130, 132)

$m \times n$ 行列 $A = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{bmatrix}}_{\text{行ベクトル分割}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \cdots & \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix}}_{\text{列ベクトル分割}}$ に対して,

$A$ の**零空間** $N(A) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ (同次連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体が作る $\mathbb{R}^n$ の部分空間)
$A$ の**行空間** $R(A) := \langle \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_m \rangle$ ($n$ 次行ベクトル $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_m$ で生成される $\mathbb{R}_n$ の部分空間)
$A$ の**列空間** $C(A) := \langle \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n \rangle$ ($m$ 次列ベクトル $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ で生成される $\mathbb{R}^m$ の部分空間)

ただし, $\mathbb{R}_n$ は $n$ 次<u>行ベクトル</u>全体が作るベクトル空間を表す. このとき, 次が成り立つ.

- $\dim N(A) = n - \operatorname{rank} A$, $\dim R(A) = \dim C(A) = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} {}^{\mathrm{t}}A$. (教科書 命題 19.2, 19.9)
- $R(A)$ は $A$ を行基本変形しても変わらない (教科書 補題 19.4) ので, 行基本変形して, 簡約行列の主成分を含む行ベクトルを取れば $R(A)$ の基底になる.
- 行基本変形を行うと $C(A)$ は変わってしまうが, 列ベクトルの間に成り立つ１次関係式は保たれるので, 簡約行列の主成分を持つ列に対応する<u>元の</u> $A$ の列ベクトルを取れば $C(A)$ の基底になる. 別の方法として, $R({}^{\mathrm{t}}A)$ の基底を計算し, それらの転置を取ってもよい. これは $A$ を列基本変形して (列に関する) 簡約行列の主成分を含む列ベクトルを取ることに他ならない.

**〈共通部分と和空間に関する次元公式〉** (線形教科書 p. 134)

ベクトル空間 $V$ の部分空間 $W_1, W_2$ に対して, 次の等式が成り立つ:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

**例題 1** $\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathscr{B}=\left(\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right)$ に対して, $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$ の基底 $\mathscr{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathscr{B}}$ を求める.

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&-1\\2&4&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

より, 基本変形後の列ベクトルの間の関係式を考えると, $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2$ が分かる. よって $[\boldsymbol{v}]_{\mathscr{B}}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$.

**例題 2** $A=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&-1&5\\-2&3&-3\end{bmatrix}$ を行基本変形すると $\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ ($A$ の簡約行列) となる. よって, $N(A)$ の基底の１例として $\left(\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$ が取れる. また, $R(A)$ の基底の１例は, 簡約行列の主成分を持つ行を取って, $([1,\ 0,\ 3],\ [0,\ 1,\ 1])$. $C(A)$ の基底の一例は, 簡約行列の主成分を持つ列に対応する元の列ベクトルを見て $\left(\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\-1\\3\end{bmatrix}\right)$ が取れる.

【注】行ベクトルでは, しばしば成分をカンマで区切って表す (特に数が成分の場合). 例えば, 上では $[1\quad 0\quad 3]$ と書かずに $[1,\ 0,\ 3]$ と表した.

**例題 3** $\mathbb{R}^3$ の２つの部分空間

$$W_1=\left\langle \boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle, \quad W_2=\left\langle \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle$$

に対する和空間 $W_1+W_2$ と共通部分 $W_1\cap W_2$ を考える. 行基本変形により,

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&1&0\\1&1&5&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

行基本変形によって列ベクトルの間の１次関係式や１次独立性は保たれるので, 簡約行列を見て $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1$ は１次独立で, $W_1+W_2=\mathbb{R}^3$ となっていることが分かる ($(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1)$ は $W_1+W_2$ の１つの基底). また, $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ は１次独立で, $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$ も１次独立であることが分かる (簡約行列の対応する列ベクトルを見る). よって, $\dim W_1=\dim W_2=2$ であり, 次元公式から $\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1+W_2)=2+2-3=1$ となる. さらに, 簡約行列から, 非自明な１次関係式

$$\boldsymbol{a}_1+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_2-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0} \quad \text{すなわち} \quad 2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0}$$

が読み取れる. これは $2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{b}_1-2\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}\in W_1\cap W_2$ を意味する. $\dim(W_1\cap W_2)=1$ だったので, $\left(\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}\right)$ が $W_1\cap W_2$ の基底となる.

【別法】 $W_1\cap W_2$ の基底については次のように考えることもできる. $W_1\cap W_2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2=d_1\boldsymbol{b}_1+d_2\boldsymbol{b}_2$ の形に書ける. このとき, $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+(-d_1)\boldsymbol{b}_1+(-d_2)\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{0}$ であるから, 上の基本変形から $\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\-d_1\\-d_2\end{bmatrix}=\dfrac{t}{2}\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\2\end{bmatrix}$ が得られ, $2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$ $(=\boldsymbol{b}_1-2\boldsymbol{b}_2)$ が $W_1\cap W_2$ を生成することが分かる. よって, $(2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)$ が $W_1\cap W_2$ の基底となる. (次元公式は用いていない.)

## 演習問題

**1** $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\mathscr{E} = \left( \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ および次の２つの基底を考える:

$$\mathscr{A} = \left( \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad \mathscr{B} = \left( \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right).$$

(1) $[\boldsymbol{a}_1]_{\mathscr{E}}, [\boldsymbol{a}_1]_{\mathscr{A}}, [\boldsymbol{a}_1]_{\mathscr{B}}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ の基底 $\mathscr{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathscr{B}}$ が $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ のとき, $\boldsymbol{v}$ の基底 $\mathscr{E}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathscr{E}}$ および基底 $\mathscr{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathscr{A}}$ を求めよ.

**2** $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ を考えると, $\mathscr{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ は $V$ の基底である. このとき, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$ がともに $V$ に属することを示し, 基底 $\mathscr{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathscr{A}}, [\boldsymbol{b}_2]_{\mathscr{A}}$ を求めよ.

**3** $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W_1, W_2$ を次のように定める:

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ 2x + 3y + z = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ \begin{array}{l} \text{連立１次方程式} \\ \begin{cases} x + 4y + 3z = a \\ 2x + 3y + \ \ z = b \\ 3x + 5y + 2z = c \end{cases} \\ \hfill \text{が解をもつ} \end{array} \right\}$$

(1) $W_1$ の基底と次元を求めよ.

(2) $W_2$ は行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ の列空間となる. この事実に注目して, $W_2$ の基底と次元を求めよ.

(3) 上で求めた $W_1, W_2$ の基底に含まれるベクトルから $W_1 + W_2$ の基底を選び, その次元を求めよ.

(4) $W_1 \cap W_2$ の基底と次元を求めよ.

**4** $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W_1, W_2, W_3$ を次のように定める.

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ \middle| \ \begin{array}{r} 2x + 3y + 3z - 3w = 0 \\ -x - 2y - z + w = 0 \end{array} \right\},$$

$$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ \middle| \ 2x + y - 4z + w = 0 \right\}$$

(1) $W_2$ の基底と次元を求めよ.

(2) $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$ について, 基底と次元を求めよ.

(3) $W_2 + W_3, W_2 \cap W_3$ について, 基底と次元を求めよ.

$\boxed{5}$ $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ とする.

(1) $A$ の零空間 $N(A)$, 行空間 $R(A)$, 列空間 $C(A)$ について, 基底と次元を求めよ.

(2) ${}^{\mathrm{t}}A$ の零空間 $N({}^{\mathrm{t}}A)$, 行空間 $R({}^{\mathrm{t}}A)$, 列空間 $C({}^{\mathrm{t}}A)$ について, 基底と次元を求めよ.

## レポート課題

- **答だけでなく**, **計算の過程も** 書いて下さい. （A4 **用紙１〜２枚**にまとめ pdf ファイルに変換して提出）
- 授業に出席し, レポートを授業翌日までに **WebClass に提出** して「出席」となります.

$\boxed{\mathrm{I}}$ $\mathbb{R}^3$ の２つの部分空間

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

と, $W_2$ の基底 $\mathscr{B} = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ について次の問いに答えよ.

(1) $W_1 + W_2$ の１つの基底を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ から選べ. また, その基底を $\mathscr{A}$ とするとき, 残りのベクトル $(\in W_1 + W_2)$ の基底 $\mathscr{A}$ に関する座標を求めよ.

(2) $W_1 \cap W_2$ の１つの基底を求めよ. また, その基底をなすベクトル $(\in W_2)$ の基底 $\mathscr{B}$ に関する座標を求めよ.

$\boxed{\mathrm{II}}$ 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ を行基本変形により簡約行列まで変形し, それを利用して $A$ の零空間 $N(A)$, 行空間 $R(A)$, 列空間 $C(A)$ のそれぞれについて, 基底と次元を求めよ. ただし, 基底をなすベクトルは整数を成分とするように選べ.