# 数学演習第二（演習第７回）【解答例】

**線形： 座標, 行列の零空間・行空間・列空間**　　2023 年 11 月 22 日

## 演習問題

**1** (1) まず, $\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ より $[\boldsymbol{a}_1]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 次に, $[\boldsymbol{a}_1]_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 最後に, $[\boldsymbol{a}_1]_{\mathscr{B}}$ を求めるために $\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}_1$ を解く.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{a}_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

より, $\boldsymbol{a}_1 = 5\boldsymbol{b}_1 - 4\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$. よって, $[\boldsymbol{a}_1]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(2) まず, 与えられた条件から $\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{b}_1 + q\boldsymbol{b}_2 + r\boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} p+2q+3r \\ 2p+4q+5r \\ 3p+5q+6r \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v}]_{\mathscr{E}}$. 次に, $[\boldsymbol{v}]_{\mathscr{A}}$ を求めるために, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+2q+3r \\ 2p+4q+5r \\ 3p+5q+6r \end{bmatrix}$ を解く.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{v} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & p+2q+3r \\ -1 & 0 & 1 & 2p+4q+5r \\ 1 & -1 & 0 & 3p+5q+6r \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3p+5q+6r \\ -1 & 0 & 1 & 2p+4q+5r \\ 0 & 1 & -2 & p+2q+3r \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2p-4q-5r \\ 0 & 1 & -1 & -5p-9q-11r \\ 0 & 0 & -1 & 6p+11q+14r \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8p-15q-19r \\ 0 & 1 & 0 & -11p-20q-25r \\ 0 & 0 & 1 & -6p-11q-14r \end{array}\right]$$

より, $[\boldsymbol{v}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} -8p-15q-19r \\ -11p-20q-25r \\ -6p-11q-14r \end{bmatrix}$.

**2** $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2)$ をまとめて解く.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 4 & -7 \\ 1 & 4 & -5 & 7 \\ -2 & 1 & -8 & 13 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & -7 & 14 & -21 \\ 0 & 9 & -18 & 27 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

より, $\boldsymbol{b}_1 = 3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_2 = -5\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 \in V$ であることが分かり, $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{b}_2]_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

**3** (1) 同次連立１次方程式 $2x + 3y + z = 0$ の解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ であるから, $W_1$ の１つの基底は $\left( \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ で, 次元は $\dim W_1 = 2$.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $W_2$ の１つの基底は $\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right)$ であり, 次元は $\dim W_2 = 2$.

(3) (1), (2) で選んだ $W_1$, $W_2$ の基底をそれぞれ $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ と書き, $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$ を行基本変形によ

り簡約化すると，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -3 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 & 4 & \frac{17}{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

よって，$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) = \left( \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ が $W_1 + W_2$ の基底となる．また, 次元は $\dim(W_1 + W_2) = 3$. ($W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ であることに注意.)

(4) $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$ の簡約行列から，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ の非自明な１次関係式は $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - 4\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$ およびそれを 0 でない定数倍したものに限られることが読み取れる ( $\boxed{\text{例題 3}}$【別法】参照)． このとき，$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = 4\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 = 2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$ であるから，$W_1 \cap W_2$ の基底は $\left( \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ であり，次元は $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

$\boxed{4}$ (1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ より，$W_2$ の次元は $\dim W_2 = 2$ で，１つの基底は $\left( \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$．これを $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ とおく．

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は明らかに１次独立なので, $\dim W_1 = 2$ であり，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 6 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より, $W_1 + W_2$ の次元は $\dim(W_1 + W_2) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} = 3$ で, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$ が基底となる．共通部分と和空間の次元公式から, $\dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 3 = 1$. 上の簡約行列から, $-2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{b}_1 + 4\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$ という非自明な１次関係式が読み取れる．これより，$2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{b}_1 + 4\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$ が従う.

$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ だから，$\left( \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$ が $W_1 \cap W_2$ の基底となる.

【注意】$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 \\ c_2 \\ c_1 - c_2 \\ 2c_1 \end{bmatrix}$ を $W_2$ の条件にある連立１次方程式に代入して, $c_1, c_2$ の満たす条件を求める方法でもできる.

(3) $\dim W_2 = 2, \dim W_3 = 3$. さらに，

$$W_2 \cap W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} 2x + 3y + 3z - 3w = 0 \\ -x - 2y - z + w = 0 \\ 2x + y - 4z + w = 0 \end{array} \right\}$$

だから，$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ より，

$\dim(W_2 \cap W_3) = 1$ で，１つの基底は $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$. $\dim W_2 = 2$, $\dim W_3 = 3$ より，共通部分と和に関する次元公式から, $\dim(W_2 + W_3) = 2 + 3 - 1 = 4$. $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ だから, $W_2 + W_3 = \mathbb{R}^4$.

【注意】$W_3$ の基底を求めて (1), (2) と同じ方法で考えてもよい.

$\boxed{5}$ (1) 行列 $A$ の零空間, 行空間, 列空間の基底は $A$ の簡約行列をもとに考える. 零空間 $N(A)$ の次元は $\dim N(A) = (A \text{ の列数}) - \operatorname{rank} A$ であり, 基底は同次連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を選べばよい. 列空間 $C(A)$ の次元は $\dim C(A) = \operatorname{rank} A$ であり, 基底は簡約行列の主成分に対応する元の行列 $A$ の列を取ればよい. 行空間 $R(A)$ の次元は $\dim R(A) = \operatorname{rank} A$ であり, 行基本変形で行空間は変わらないので, 基底は簡約行列の１行目から $\operatorname{rank} A$ 行目までを取ればよい.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より, $\dim N(A) = 2$ で, 基底の１つは $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. $\dim C(A) = \operatorname{rank} A = 3$ で, $A$ の簡約行列の主成分が第 $1, 2, 4$ 列にあることから, 基底の１つは $A$ の第 $1, 2, 4$ 列 $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$. また, $\dim R(A) = \operatorname{rank} A = 3$ で, １つの基底は $(\,[1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 2],\ [0,\ 1,\ 2,\ 0,\ 3],\ [0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0]\,)$.

(2) $${}^{\mathrm{t}}A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ -9 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 10 & 14 & 4 \\ 0 & -15 & -21 & -6 \\ 0 & -8 & -11 & -4 \\ 0 & -25 & -35 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ より,

零空間 $N({}^{\mathrm{t}}A)$ については, $\dim N({}^{\mathrm{t}}A) = 1$ で, １つの基底は $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. 列空間 $C({}^{\mathrm{t}}A)$ については, $\dim C({}^{\mathrm{t}}A) = \operatorname{rank} {}^{\mathrm{t}}A = 3$ で, 簡約行列の主成分が第 $1, 2, 3$ 列にあることから, １つの基底は ${}^{\mathrm{t}}A$ の第 $1, 2, 3$ 列 $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. また, 行空間 $R({}^{\mathrm{t}}A)$ については, $\dim R({}^{\mathrm{t}}A) = \operatorname{rank} {}^{\mathrm{t}}A = 3$ で, １つの基底は $(\,[1,\ 0,\ 0,\ 1],\ [0,\ 1,\ 0,\ 6],\ [0,\ 0,\ 1,\ -4]\,)$.

【注意】$R({}^{\mathrm{t}}A)$ の基底は $C(A)$ の基底の転置, $C({}^{\mathrm{t}}A)$ の基底は $R(A)$ の基底の転置をとってもよい.

## レポート課題

**I** $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$ を行基本変形により簡約化すると,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(1) 上の計算より, $W_1 + W_2$ の基底として $\mathscr{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$ がとれる. また, 残りのベクトル $\boldsymbol{b}_2$ は $\boldsymbol{b}_2 = -2\boldsymbol{a}_1 + 7\boldsymbol{a}_2 + 4\boldsymbol{b}_1$ と書けるので, $\boldsymbol{b}_2 \in W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ の基底 $\mathscr{A}$ に関する座標は $[\boldsymbol{b}_2]_{\mathscr{A}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(2) $\boxed{\text{例題 3}}$ と同様にして, $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$, $\dim(W_1 + W_2) = 3$ ($(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2)$ が基底になる) が分かる. よって, 次元公式により $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 1$. また, 簡約行列から非自明な関係式 $2\boldsymbol{a}_1 - 7\boldsymbol{a}_2 - 4\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$ が読み取れる. 従って, $2\boldsymbol{a}_1 - 7\boldsymbol{a}_2 = 4\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \\ -5 \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$ となり, $W_1 \cap W_2$ の 1 つの基底として $(4\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2) = \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \\ -5 \end{bmatrix} \right)$ がとれる. このとき, $4\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 \in W_2$ の基底 $\mathscr{B}$ に関する座標は $[4\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$.

**【別法】** $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ とすれば, $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = d_1\boldsymbol{b}_1 + d_2\boldsymbol{b}_2$ と書ける. このとき,

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = d_1\boldsymbol{b}_1 + d_2\boldsymbol{b}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -d_1 \\ -d_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \overset{\text{上で行った}}{\underset{\text{行基本変形}}{\Longleftrightarrow}} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -d_1 \\ -d_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数})$$

であるから, 任意の $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ は $\boldsymbol{x} = t(2\boldsymbol{a}_1 - 7\boldsymbol{a}_2) = t(4\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2)$ の形に書ける. よって, $W_1 \cap W_2 = \langle 2\boldsymbol{a}_1 - 7\boldsymbol{a}_2 \rangle = \langle 4\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 \rangle$ となり, $W_1 \cap W_2$ の 1 つの基底は $(4\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2) = \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \\ -5 \end{bmatrix} \right)$ である.

**II** $A$ を行基本変形により簡約化すると,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

これより,

- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($s, t$ は任意定数) であるから, $N(A)$ の基底は $\left( \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$, 次元は $\dim N(A) = 2$.
- $R(A)$ の基底は, $A$ の簡約行列の主成分を含む行ベクトルの 2 倍をとって, $([2,\ 0,\ -2,\ 0,\ 3],\ [0,\ 2,\ 4,\ 0,\ -1],\ [0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 1])$, 次元は $\dim R(A) = 3$.
- $C(A)$ の基底は, $A$ の簡約行列の主成分のある場所に対応する $A$ の列ベクトル ($A$ の第 $1, 2, 3$ 列) を取って, $\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$, 次元は $\dim C(A) = 3$.