数学演習第二 （演習第９回）

線形：線形写像, 核と像　2023 年 12 月 13 日

要点

V, W を<u>ベクトル空間</u>とする. また, $\mathbf{0}_V, \mathbf{0}_W$ をそれぞれ V, W の零ベクトルとする.

〈線形写像の定義〉 (線形教科書 p. 142)

- 写像 $f\colon V \to W$ が **線形写像** であるとは

  (i)　$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}')$　$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in V)$,　　(ii)　$f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$　$(\boldsymbol{x} \in V,\ k \in \mathbb{R})$

  の 2 条件 (**線形性**) を満たすことをいう. 特に $V = W$ のとき f を V の**線形変換**とよぶことがある.

〈線形写像の決定〉 (線形教科書 p. 145)

- $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ を V の<u>基底</u>とする. このとき, 任意の $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n \in W$ に対して,

  $$f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}_1,\ \ldots,\ f(\boldsymbol{a}_n) = \boldsymbol{b}_n$$

  を満たす線形写像 $f\colon V \to W$ がただ 1 つ存在する.

〈線形写像の核, 像〉 (線形教科書 pp. 139–142, 147–154)

- $f\colon V \to W$ が線形写像のとき,
  (1)　$\operatorname{Ker} f := \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_W\}$ (V の部分空間) を f の **核** という.
  (2)　$\operatorname{Im} f := f(V) = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in V\}$ (W の部分空間) を f の **像** という.
- 集合 X から Y への写像 $\varphi\colon X \to Y$ に対して,
  (1) φ が**単射**であるとは, 任意の $x, x' \in X$ に対して $x \neq x' \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(x')$ が成り立つこと.
  (2) φ が**全射**であるとは, 任意の $y \in Y$ に対して $\varphi(x) = y$ となる $x \in X$ が存在すること.
  (3) φ が全射かつ単射であるとき **全単射** であるという.

  $f\colon V \to W$ が線形写像のときには次が成り立つ.
  (1) f が単射 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_V\}$ $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} f = 0$.
  (2) f が全射 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = W$ $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$.
  (3) $\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.

《列ベクトル空間の間の線形写像》

- $m \times n$ 行列 A に対して, 写像 $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義すれば, f_A は線形写像である (f_A を **行列 A の定める線形写像** とよぶ). 逆に, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線形写像のとき,

  $$A = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{e}_n) \end{bmatrix} \qquad (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の基本ベクトル (標準基底)})$$

  と定めれば, $f(\boldsymbol{x}) = f_A(\boldsymbol{x})$ が成り立つ (f は行列 A の定める線形写像 f_A と一致する). 従って, 列ベクトル空間の間の線形写像はすべて “行列の掛け算” によって与えられる.

- $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ を $m \times n$ 行列とする. 行列 A の定める線形写像 $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して,
  (1)　$\operatorname{Ker} f_A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\} = N(A)$　(A の零空間).
  (2)　$\operatorname{Im} f_A = \langle f_A(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f_A(\boldsymbol{e}_n) \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle = C(A)$　(A の列空間).

  さらに, $\dim \operatorname{Im} f_A = \operatorname{rank} A$ であって, 次が成り立つ.
  (1) f_A が単射 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} A = n$.　　(2) f_A が全射 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} A = m$.
  (3) A が正方行列 $(m = n)$ のとき, f_A が単射 $\Leftrightarrow$ f_A が全射 $\Leftrightarrow$ A が正則.

例 1　要点の《列ベクトル空間の間の線形写像》にある次の事実を確認する．

- A が $m \times n$ 行列であるとき，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定まる $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は線形写像である．実際，
$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x}'), \quad f(k\boldsymbol{x}) = A(k\boldsymbol{x}) = kA\boldsymbol{x} = kf(\boldsymbol{x}).$$
- $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線形写像ならば，$A = [f(\boldsymbol{e}_1) \ \cdots \ f(\boldsymbol{e}_n)]$ とおいて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が成り立つ．実際，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ と表せば，f の線形性により，
$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n) = [f(\boldsymbol{e}_1) \ \cdots \ f(\boldsymbol{e}_n)]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

例 2　$\mathbb{R}[x]_n$ を変数 x の n 次以下の実係数多項式全体の作るベクトル空間とする．

- 写像 $D:\mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_{n-1}$ を $p(x) \mapsto p'(x)$ によって定めれば，D は線形写像である．実際，
$$\{p(x)+q(x)\}' = p'(x)+q'(x), \quad \{kp(x)\}' = kp'(x).$$
- 写像 $S:\mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_{n+1}$ を $p(x) \mapsto \int_0^x p(t)\,dt$ によって定めれば，S は線形写像である．実際，
$$\int_0^x \{p(t)+q(t)\}\,dt = \int_0^x p(t)\,dt + \int_0^x q(t)\,dt, \quad \int_0^x kp(t)\,dt = k\int_0^x p(t)\,dt.$$

例 3　$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を満たす線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を求める．

($\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ は明らかに $\mathbb{R}^2$ の基底であるから，条件を満たす線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ がただ 1 つ存在する.)

$\boxed{\text{方法 1}}$　$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．まず，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ を満たす c_1, c_2 を求める．これを変形して
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$
が得られるから，
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (2x_1 - x_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-x_1 + x_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
よって，
$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= f\left((2x_1 - x_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-x_1 + x_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = (2x_1 - x_2) f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + (-x_1 + x_2) f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= (2x_1 - x_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-x_1 + x_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{方法 2}}$　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ はある 3×2 行列 A を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2)$ の形で与えられる．この行列 A を求めよう．
$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{より，} \quad A\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$
であるから，
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

演習問題

1 以下の写像が線形写像になるかどうか調べよ．(演習書 問題 12.1.1 類題)

(1) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ で定義される写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(2) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

(3) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 1 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

(4) $T(p(x)) = p(x+1)$ で定義される写像 $T\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$.

2 $m \times n$ 行列 A を次のように定めるとき, それぞれの A が定める $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ について以下の問いに答えよ．(演習書 問題 12.2.4 類題)

$$\text{(i)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{(iii)}\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(1) $\operatorname{Ker} f$ の次元と基底を求めよ． ($\{\boldsymbol{0}\}$ の場合, 基底は無し, 次元は 0 であることに注意)

(2) $\operatorname{Im} f$ の次元と基底を求めよ．

(3) f は単射であるかを調べよ．また, 全射であるかを調べよ．

3 (1) k を実数とする．

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ k \end{bmatrix}$$

を満たす線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を, 例 3 (裏面) で示された 2 つの方法で求めよ．

(2) (1) の f が単射にならないための k の条件を求めよ．さらに, k がその条件を満たすとき, $\operatorname{Im} f$ の次元と基底を求めよ．

4 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ の定める $\mathbb{R}^3$ の線形変換 $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ について, 次のもの (f_A による像) を求めよ．ただし, $\mathbb{R}^3$ の点 (x, y, z) とベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を同一視する．

(1) 点 $(1, -1, 2)$ の像.

(2) 直線 $\ell : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-2}{4}$ の像． (まず直線の方程式を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ の形に表せ.)

(3) 平面 $\alpha : x + 3y - 2z = 4$ の像． (まず平面の方程式を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} + t\boldsymbol{c}$ の形に表せ.)

(4) $\mathbb{R}^3$ の像.

$\boxed{5}$ 線形写像 $L\colon \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ を

$$L(p(x)) = 2p(x) - (x+1)p'(x)$$

で定義する.

(1) $\mathrm{Ker}\, L$ の次元と基底を求めよ.

(2) $\mathrm{Im}\, L$ の次元と基底を求めよ.

レポート課題

- **答だけでなく，計算の過程も**書いて下さい.（A4 **用紙１〜２枚**にまとめ, pdf ファイルに変換して提出）
- 授業に出席し, レポートを授業翌日までに **WebClass に提出**して「出席」となります.

$\boxed{\mathrm{I}}$ $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ に対して, 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が

$$f(\boldsymbol{a}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{a}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{a}_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を満たすとする. このような f を行列を用いて表せ.

$\boxed{\mathrm{II}}$ 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ の定める $\mathbb{R}^5$ から $\mathbb{R}^4$ への線形写像 $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ について考える.

(1) $\mathrm{Ker}\, f_A$ の基底と次元を求めよ.

(2) $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底と次元を求めよ.