数学演習第二（演習第９回）　【解答例】

線形：線形写像, 核と像　　2023 年 12 月 13 日

演習問題

1

(1) $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ に対して, $f(\boldsymbol{e}_1) = f(-\boldsymbol{e}_1) = 1$ より, $f(-\boldsymbol{e}_1) \neq -f(\boldsymbol{e}_1)$. よって, f は線形写像でない.

(2) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ と行列の掛け算で表されるので, f は線形写像である.

次のように線形写像の条件を確認してもよい. 任意の $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \\ x_3 + x_3' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x_1 + x_1') + (x_2 + x_2') \\ (x_1 + x_1') + (x_3 + x_3') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2) + (x_1' + x_2') \\ (x_1 + x_3) + (x_1' + x_3') \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1' + x_2' \\ x_1' + x_3' \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}\right),$$

$$f\left(k\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx_1 + kx_2 \\ kx_1 + kx_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix} = kf\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$$

が成り立つ. よって, f は線形写像である.

(3) $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となるので, f は線形写像でない.

(4) 任意の $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]_n$, $k \in \mathbb{R}$ に対して, $r(x) = p(x) + q(x)$, $s(x) = kp(x) \in \mathbb{R}[x]_n$ とおけば,

$$T(p(x) + q(x)) = T(r(x)) = r(x+1) = p(x+1) + q(x+1) = T(p(x)) + T(q(x)),$$
$$T(kp(x)) = T(s(x)) = s(x+1) = kp(x+1) = kT(p(x))$$

が成り立つ. よって, T は線形写像である.

2

(i) (1) A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ なので, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$. よって,

$\mathrm{Ker}\, f$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}$ を選ぶことができ, 次元は $\dim \mathrm{Ker}\, f = \boxed{1}$ である.

(2) $\mathrm{Im}\, f = C(A)$ の基底は A の 3 つの列ベクトルの中から 1 次独立な最大個数の組を選べばよい. A の簡約行列の主成分が第 1 列と第 3 列にあるので, A の列ベクトルから 1 番目と 3 番目を選んだ組, すなわち $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$ を $\mathrm{Im}\, f$ の基底として選ぶことができる. 次元は $\dim \mathrm{Im}\, f = \boxed{2}$. ($\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^2$ であるから, $\mathrm{Im}\, f$ の基底として, $\mathbb{R}^2$ の標準基底を選んでもよい.)

(3) $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1 \neq 0$, $\dim \mathrm{Im}\, f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ なので, f は単射でないが全射である.

(ii) (1) A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ であるから, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみ. よって, $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{0}\}$ ($\mathrm{Ker}\, f$ の基底は無し) となり, 次元は $\dim \mathrm{Ker}\, f = \boxed{0}$ である.

(2) A の簡約行列の主成分がすべての列にあるから, $\operatorname{Im} f$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0\\6\end{bmatrix}\right)}$ を選ぶことができ, 次元は $\dim \operatorname{Im} f = \boxed{3}$ である. ($\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ であるから, $\operatorname{Im} f$ の基底として, $\mathbb{R}^3$ の標準基底を選んでもよい.)

(3) $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, $\dim \operatorname{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ なので, f は単射かつ全射 (全単射) である.

(iii) (1) A の簡約行列は $\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ なので, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}2\\-3\\0\\1\end{bmatrix}$ と表される. よって, $\operatorname{Ker} f$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\\0\\1\end{bmatrix}\right)}$ を選ぶことができ, 次元は $\dim \operatorname{Ker} f = \boxed{2}$ である.

(2) A の簡約行列の主成分の位置を見て, A の 1 番目, 2 番目の列ベクトルを取れば $\operatorname{Im} f$ の基底となることが分かる. $\operatorname{Im} f$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}\right)}$ を選ぶことができ, 次元は $\dim \operatorname{Im} f = \boxed{2}$ である.

(3) $\dim \operatorname{Ker} f = 2 \neq 0$, $\dim \operatorname{Im} f = 2 \neq \dim \mathbb{R}^4$ なので, f は単射でも全射でもない.

3

(1) 方法 1 各 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)$ を求める. そのために, まず, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$ を満たす $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ を求めると, $\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3&2\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3x_1+2x_2\\2x_1-x_2\end{bmatrix}$.
よって, f の線形性により,

$$
\begin{aligned}
f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) &= f\left((-3x_1+2x_2)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + (2x_1-x_2)\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) = (-3x_1+2x_2)f\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) + (2x_1-x_2)f\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) \\
&= (-3x_1+2x_2)\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix} + (2x_1-x_2)\begin{bmatrix}2\\6\\k\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}x_1\\3x_1\\(2k-15)x_1+(10-k)x_2\end{bmatrix}}.
\end{aligned}
$$

方法 2 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ は 3×2 行列 A を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表される. この行列 A を求めよう.

$$
f\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix},\quad f\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\6\\k\end{bmatrix} \quad \text{より,}\quad A\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2\\3&6\\5&k\end{bmatrix}.
$$

よって,

$$
A = \begin{bmatrix}1&2\\3&6\\5&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1&2\\3&6\\5&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&2\\2&-1\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}1&0\\3&0\\2k-15&10-k\end{bmatrix}}.
$$

(2) (1) より, f は行列 $A = \begin{bmatrix}1&0\\3&0\\2k-15&10-k\end{bmatrix}$ を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表される. f が単射にならないのは $\dim \operatorname{Ker} f \neq 0$ のとき, すなわち $\operatorname{rank} A \neq 2$ のときである. A は $\begin{bmatrix}1&0\\0&10-k\\0&0\end{bmatrix}$ と簡約化できるから, 求める条件は $\boxed{k = 10}$. この条件が成り立つとき, $A = \begin{bmatrix}1&0\\3&0\\5&0\end{bmatrix}$ だから, $\dim \operatorname{Im} f = \boxed{1}$ で, $\operatorname{Im} f$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}\right)}$ がとれる.

4 (1) $f_A\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\9\end{bmatrix}$. よって, 像は $\boxed{\text{点 }(4,5,9)}$.

(2) 直線 ℓ 上の点は $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}3\\-2\\4\end{bmatrix}$ と表される.

$$f_A\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}3\\-2\\4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&5\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}3\\-2\\4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\5\\9\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}9\\11\\20\end{bmatrix}$$

であるから, 直線 ℓ の像は $\boxed{\text{直線 }\dfrac{x-4}{9}=\dfrac{y-5}{11}=\dfrac{z-9}{20}}$. (パラメータ表示してもよい.)

(3) 平面 α 上の点は $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$ と表される. この点の像は

$$f_A\left(\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&5\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\4\\8\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-2\\-1\\-3\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}4\\5\\9\end{bmatrix}.$$

ここで, $\begin{bmatrix}-2\\-1\\-3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\5\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\6\\-6\end{bmatrix}\mathbin{/\!/}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ であるから, 平面 α の像は平面 $(x-4)+(y-4)-(z-8)=0$, すなわち $\boxed{\text{平面 }x+y-z=0}$.

(4) $\mathbb{R}^3$ の像は $f_A(\mathbb{R}^3)=\operatorname{Im}f_A=C(A)$. A の簡約行列は $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ だから,

$$f_A(\mathbb{R}^3)=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\rangle=\left\{s\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\,\middle|\,s,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

ここで, $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ より, $\mathbb{R}^3$ の像は $\boxed{\text{平面 }x+y-z=0}$.

5 (1) $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ とおくと,

$$\begin{aligned}L(p(x))&=2(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)-(x+1)(a_1+2a_2x+3a_3x^2)\\&=(2a_0-a_1)+(a_1-2a_2)x-3a_3x^2-a_3x^3\end{aligned}$$

となる. これより,

$$\begin{aligned}p(x)\in\operatorname{Ker}L\quad&\Leftrightarrow\quad 2a_0-a_1=0,\ a_1-2a_2=0,\ a_3=0\\&\Leftrightarrow\quad a_0=c,\ a_1=2c,\ a_2=c,\ a_3=0\quad(c\text{ は任意定数})\\&\Leftrightarrow\quad p(x)\in\langle 1+2x+x^2\rangle.\end{aligned}$$

よって, $\operatorname{Ker}L$ の基底として $\boxed{\left(1+2x+x^2\right)}$ を選ぶことができ, 次元は $\dim\operatorname{Ker}L=\boxed{1}$ となる.

(2) $\mathbb{R}[x]_3$ の基底として, $\left(1,x,x^2,x^3\right)$ を取ると,

$$\operatorname{Im}L=\left\langle L(1),\,L(x),\,L(x^2),\,L(x^3)\right\rangle=\left\langle 2,\,-1+x,\,-2x,\,-3x^2-x^3\right\rangle=\left\langle 2,\,-1+x,\,-3x^2-x^3\right\rangle.$$

ここで, 最後の等号は $-2x=(-1)\cdot 2+(-2)(-1+x)$ による (前から順に 1 次独立になるものを残した). $2,-1+x,-3x^2-x^3$ は 1 次独立となるので, $\operatorname{Im}L$ の基底として $\boxed{\left(2,-1+x,-3x^2-x^3\right)}$ を取ることができ, 次元は $\dim\operatorname{Im}L=\boxed{3}$ となる. より簡潔な基底として $\boxed{\left(1,\,x,\,3x^2+x^3\right)}$ を選んでもよい.

レポート問題

I f はある 3×2 行列 A を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ の形で与えられる．このような行列 A を求める．与えられた条件より

$$f(\boldsymbol{a}_1) = A\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\quad f(\boldsymbol{a}_2) = A\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix},\quad f(\boldsymbol{a}_3) = A\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

であるから，行列 A は $A\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&-1&3\\-1&3&1\end{bmatrix}$ を満たす．そこで，あらかじめ

$$\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

を計算しておき，

$$A = \begin{bmatrix}1&-1&3\\-1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&3\\-1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}1&2&0\\2&0&1\end{bmatrix}}.$$

【別解】 $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)$, $\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3)$, $\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)$ に気付けば，$A = [\,f(\boldsymbol{e}_1)\ \ f(\boldsymbol{e}_2)\ \ f(\boldsymbol{e}_3)\,]$ から容易に計算できる．

II A に行基本変形を施すと，

$$A = \begin{bmatrix}1&2&2&3&8\\0&1&3&1&5\\2&3&1&-5&1\\-1&0&4&-1&2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&2&2&3&8\\0&1&3&1&5\\0&-1&-3&-11&-15\\0&2&6&2&10\end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix}1&0&-4&0&-3\\0&1&3&0&4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

と簡約化できる．

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix}4\\-3\\1\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}3\\-4\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$ $(s, t$ は任意定数$)$ と表される．

よって，$\mathrm{Ker}\, f_A$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}4\\-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-4\\0\\-1\\1\end{bmatrix}\right)}$ が取れ，次元は $\dim \mathrm{Ker}\, f_A = \boxed{2}$．

(2) A の簡約行列の主成分をもつ列が第 1 列，第 2 列，第 4 列にある．

よって，$\mathrm{Im}\, f$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\0\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\-5\\1\end{bmatrix}\right)}$ が取れ，次元は $\dim \mathrm{Im}\, f_A = \boxed{3}$．

【別解】 $\mathrm{Im}\, f = C(A)$ (A の列空間) であるから，次のようにして $\mathrm{Im}\, f$ の基底を求めることもできる．A を 列基本変形 して

$$A = \begin{bmatrix}1&2&2&3&8\\0&1&3&1&5\\2&3&1&-5&1\\-1&0&4&-1&2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&3&1&5\\2&-1&-3&-11&-15\\-1&2&6&2&10\end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\-1&2&0&0&0\end{bmatrix}.$$

これから $\mathrm{Im}\, f$ の基底 $\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right)}$ を得る．