数学演習第二（演習 第10回）

微積：重積分 [1]（重積分の定義，累次積分）

2023 年 12 月 20 日 実施

- 授業中の演習問題は $\boxed{1}$ の 6 問です．レポート課題は $\boxed{2}$ の 4 問です．
- それ以外の問題は自習用問題です（こちらも是非解いてください）．
- 要点もよく読むこと．また，問題を解く際には積分領域をかならず図示してみること．
- レポート課題の答案には答えだけでなく途中の計算も書いてください．

【要点】

■ 累次積分の定義（微積教科書 pp. 109–110）

- $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ は有界閉区間 $[a,b]$ で連続であるとする．
  $D = \{(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\}$ （x に関して単純な領域）の場合
  まず，x を固定して，連続関数 $f(x,y)$ を y について $\varphi_1(x)$ から $\varphi_2(x)$ まで積分する：
  $$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad (x \in [a,b])$$
  このとき，$F(x)$ は有界閉区間 $[a,b]$ で連続であることが示される（例えば，宮島静雄 著『微分積分学 II －多変数の微分積分－』(共立出版，2003) の命題 4.23 参照）．よって，微積教科書の定理 3.4.1 から，$F(x)$ は有界閉区間 $[a,b]$ で積分可能である．そこで，$F(x)$ を a から b まで積分したもの $\displaystyle\int_a^b F(x)\,dx$ を $\displaystyle\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ で表す．
- $\psi_1(y), \psi_2(y)$ は有界閉区間 $[c,d]$ で連続であるとする．
  $D = \{(x,y) \mid c \leqq y \leqq d,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\}$ （y に関して単純な領域）の場合
  x に関して単純な領域の場合と同様に，連続関数 $g(x,y)$ を x について $\psi_1(y)$ から $\psi_2(y)$ まで積分したもの $G(y) = \displaystyle\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} g(x,y)\,dx$ を，さらに c から d まで積分したもの $\displaystyle\int_c^d G(y)\,dy$ を $\displaystyle\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} g(x,y)\,dx$ で表す．
- $\displaystyle\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ と $\displaystyle\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$ をまとめて **累次積分，反復積分** (iterated integral, repeated integral) という．ただし，“単純な領域”という用語は一般的でない（そのような言い方は余り普及していない）．

■ 累次積分と 2 重積分の関係（微積教科書 pp. 111–112）

- D が（x または y に関して）単純な領域の場合には累次積分と 2 重積分の値は一致する．すなわち，D が x に関して単純な領域の場合には
  $$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \quad \cdots \quad (\text{イ})$$
  となり，D が y に関して単純な領域の場合には
  $$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \quad \cdots \quad (\text{ロ})$$
  となる．ただし，$f(x,y), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \psi_1(y), \psi_2(y)$ は連続関数とする．
- **例 1** (微積教科書 p. 115, 2 (3))
  $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0\}$ のとき $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ を求める．D を x に関して単純な領域で表すと，$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\}$ となるので，
  $$\iint_D x\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy = \int_0^1 x \cdot 2\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{2}{3}\int_0^1 \left\{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right\}'\,dx = \frac{2}{3}$$
  を得る．また，$D = \{(x,y) \mid -1 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq \sqrt{1-y^2}\,\}$ のように，y に関して単純な領域でも表すことができる

ので，

$$\iint_D x\,dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1-y^2}{2}\,dy = \int_0^1 (1-y^2)\,dy = \frac{2}{3}$$

と計算してもよい．積分順序によって積分の計算の難易度は変わることが多いことに注意しよう．

- **例 2** (微積教科書 p. 115, 2 (7))
  3 変数関数 $f(x,y,z)$ の場合にも同様に累次積分を定義することができ，それを利用して 3 重積分を計算することができる．例えば，$D = \{(x,y,z) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x+y+z \leqq 1\}$ のとき $\iiint_D z\,dxdydz$ を求めてみよう．
  $D = \{(x,y,z) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1-x,\ 0 \leqq z \leqq 1-x-y\}$ と表されるから，

$$\begin{aligned}\iiint_D z\,dxdydz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} dy \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6}\,dx = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

  と計算できる．

■ 累次積分の積分順序の交換（微積教科書 p. 113）

- **例 3** (微積教科書 p. 115, 3 (1))
  累次積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$ の積分順序を交換する．すなわち，先に y で積分して後に x で積分したものを，先に x で積分して後に y で積分する形に書き換える．
  $D = \{(x,y) \mid -1 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2\sqrt{1-x^2}\}$ とおくと，累次積分と 2 重積分の関係（イ）より，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$$

  が成り立つ．一方，D は $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 2,\ -\sqrt{1-(y^2/4)} \leqq x \leqq \sqrt{1-(y^2/4)}\,\}$ とも表されるので，累次積分と 2 重積分の関係（ロ）より，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{1-(y^2/4)}}^{\sqrt{1-(y^2/4)}} f(x,y)\,dx$$

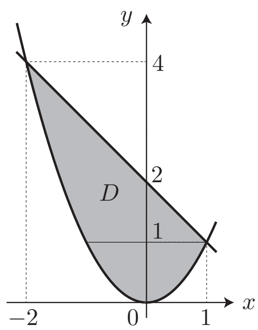
  が成り立つ．以上より，

$$\int_{-1}^{1} dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{1-(y^2/4)}}^{\sqrt{1-(y^2/4)}} f(x,y)\,dx$$

  となり，積分順序を交換することができた．

- **例 4** (微積教科書 p. 115, 3 (2))
  累次積分 $\displaystyle\int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{-x+2} f(x,y)\,dy$ の積分順序を交換する．
  $D = \{(x,y) \mid -2 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq -x+2\}$（$x$ に関して単純な領域）とおくと，

$$\int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{-x+2} f(x,y)\,dy = \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$



  D を y に関して単純な領域に表す（右図参照）：

$$\begin{aligned}D &= \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 4,\ -\sqrt{y} \leqq x \leqq \min\{\sqrt{y}, 2-y\}\,\} \\ &= \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ -\sqrt{y} \leq x \leqq \sqrt{y}\,\} \cup \{(x,y) \mid 1 \leqq y \leq 4,\ -\sqrt{y} \leqq x \leqq 2-y\,\}.\end{aligned}$$

  以上より，

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{-x+2} f(x,y)\,dy &= \iint_D f(x,y)\,dxdy \\ &= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\min\{\sqrt{y},2-y\}} f(x,y)\,dx = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx.\end{aligned}$$

■ 空間図形の体積（微積教科書 p. 129）

- $\mathbb{R}^3$ 内の空間図形 V の体積 $v(V)$ は，V を平面 $x=t$ で切ったときの断面積 $S(t)$ を t について積分して求められる場合がよくある．ただし，t は断面が空集合にならない範囲を動く．

- **例 5** (球の体積)
xyz 空間内において，原点中心，半径 $r>0$ の球面で囲まれた部分を B とし，B の体積 $v(B)$ を求める．B を平面 $x=t$ で切ったときの断面は円：$y^2+z^2=r^2-t^2$ なので，断面積 $S(t)$ は $S(t)=\pi(r^2-t^2)$ となる．また，t の動く範囲は $-r \leqq t \leqq r$ である．よって，
$$v(B)=\int_{-r}^{r} S(t)\,dt = 2\pi\int_0^r (r^2-t^2)\,dt = \frac{4}{3}\pi r^3$$
を得る．
【注】 断面積を求める際には平面 $y=t$ や平面 $z=t$ で切ってもよい．計算しやすいものを選択すること．
ただし，一般に，切り方を変えると断面積 $S(t)$ や t の動く範囲も変わるので注意する．

【授業中の演習問題】

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の 2 重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (2x-y)\,dxdy, \quad D=\{(x,y) \mid x+y \leqq 3,\ x \leqq y \leqq 2x\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy, \quad D=\{(x,y) \mid x \geqq 0,\ x+y \leqq 6,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{x}\,\}$

(3) $\displaystyle\iint_D x\,\sin(x+y)\,dxdy, \quad D=\{(x,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 0 \leqq x+y \leqq \pi\}$

(4) $\displaystyle\iint_D x\,e^y\,dxdy, \quad D=\{(x,y) \mid x \geqq 0,\ x^2 \leqq y \leqq 4\}$

(5) $\displaystyle\iint_D y\,\log_e x\,dxdy, \quad D=\{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq xy \leqq 2\}$

(6) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x+y+1}}, \quad D=\{(x,y) \mid x \geqq 0,\ 0 \leqq y \leqq x^2 \leqq 1\}$

【レポート課題：オンライン提出】

- **答だけでなく, 計算の過程も**書いて下さい．（A4 **用紙１〜２枚**にまとめ, pdf ファイルに変換して提出）
- 授業に出席し, レポートを授業翌日までに **WebClass に提出** して「出席」となります．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の設問に答えよ．

(1) 連続関数 $f(x,y)$ に対して，$\displaystyle I=\int_0^1 dy\int_{2y-1}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$ の積分順序を交換せよ．

(2) $\displaystyle J=\frac{1}{2}\iint_D (x^3+y^2-|x^3-y^2|)\,dxdy$，$D=\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ の値を求めよ．

(3) 空間図形 V : $x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \sqrt{1-z^2}$ を平面 $z=t$ で切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ．

(4) (3) の V の体積 $v(V)$ を求めよ．

【自習用問題】

3 次の 2 重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy,\quad D:\ y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 2y$ （演習書：問題 6.1.2（1）改題）

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy,\quad D:\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x$ （演習書：問題 6.1.2（2））

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{xy^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dxdy,\quad D:\ x^2+y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0$ （演習書：問題 6.1.2（3））

(4) $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,dxdy,\quad D:\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq \frac{\pi}{2}$ （演習書：問題 6.1.2（4））

(5) $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy,\quad D:\ x \geqq 0,\ y \leqq 2,\ \sqrt{x} \leqq y$ （演習書：問題 6.1.2（5））

(6) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x}\,dxdy,\quad D:\ x^2+y^2 \leqq x$ （演習書：問題 6.1.2（6））

4 次の累次積分の積分順序を交換せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy$ （演習書：問題 6.1.3（1））

(2) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_{x^2}^{x^3} f(x,y)\,dy$ （演習書：問題 6.1.3（5））

(3) $\displaystyle\int_0^\pi dy \int_0^{1+\cos y} f(x,y)\,dx$ （演習書：問題 6.1.3（6））

5 次の 2 重積分および累次積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \sin\frac{y}{x}\,dxdy,\quad D:\ 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}x,\ \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ （演習書：問題 6.1.4（3））

(2) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2}\,dx$

6 次の空間図形の体積を求めよ.

(1) $V_1:\ x \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq y^2$　　(2) $V_2:\ x^2+z^2 \leqq 1,\ y^2+z^2 \leqq 1$

［手順］ 立体 V_1, V_2 について，

(a) 立体を平面 $x=t$ で切った断面図を yz-平面に描き（断面が空集合にならない t の範囲も求める），その断面積を計算する.

(b) 平面 $y=t$ で切った断面，平面 $z=t$ で切った断面に対しても (a) と同様な作業を行う.

(c) 断面積を積分して立体の体積を求める（(a), (b) で求めた 3 種類の断面積のうち扱いやすいものを用いてよい）.