数学演習第二（演習第 11 回）

線形：線形写像の表現行列，基底変換行列，表現行列と座標

2024 年 1 月 10 日

【要点】

〈線形写像の表現行列〉（線形教科書 p.155–158）

V, W をベクトル空間，$f\colon V \to W$ を線形写像とし，V の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ と W の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)$ が与えられているとする．このとき，$\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ の像 $f(\boldsymbol{a}_i)$ は $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ の 1 次結合として

$$f(\boldsymbol{a}_i) = a_{1i}\boldsymbol{b}_1 + \cdots + a_{mi}\boldsymbol{b}_m = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

のように表される．この n 個の式をまとめて書くと

$$(f(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_n)) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

この右辺の $m \times n$ 行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ を $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ **に関する f の表現行列**という．

例 $\mathbb{R}^3$ の基底として $\mathcal{E}_3 = \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ を，$\mathbb{R}^2$ の基底として $\mathcal{E}_2 = \left(\boldsymbol{e}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ を考える.（これらは $\mathbb{R}^3$，$\mathbb{R}^2$ の**標準基底**とよばれる.）

このとき，$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{bmatrix}$ で定まる線形写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を考えると，

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

であるから，まとめて書くと $(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)) = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. よって，$\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2$ に関する f の表現行列は $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ である.

〈表現行列と座標〉　（線形教科書 p.158–160）

　$f\colon V \to W$ を線形写像とし，V, W の基底 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する f の表現行列を A とする．このとき，$\boldsymbol{a} \in V$ の $\mathcal{A}$ に関する座標を $[\boldsymbol{a}]_{\mathcal{A}}$, またその像 $f(\boldsymbol{a}) \in V$ の $\mathcal{B}$ に関する座標を $[f(\boldsymbol{a})]_{\mathcal{B}}$ とすると，

$$[f(\boldsymbol{a})]_{\mathcal{B}} = A[\boldsymbol{a}]_{\mathcal{A}}$$

が成り立つ．
($\dim V = n, \dim W = m$ とすると，$[\boldsymbol{a}]_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^n, [f(\boldsymbol{a})]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^m$ で，A は $m \times n$ 行列．)

〈基底変換行列〉　（線形教科書 p.162–164）

　ベクトル空間 V の 2 つの基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n), \mathcal{A}' = (\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_n)$ に対して，$\boldsymbol{a}'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合として

$$\boldsymbol{a}'_i = p_{1i}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + p_{ni}\boldsymbol{a}_n = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\begin{bmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

のように表される．この n 個の式をまとめて書くと

$$(\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_n) = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}.$$

この右辺の $n \times n$ 行列 $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$ を **$\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}'$ への基底変換行列**という．

このとき，$\boldsymbol{a} \in V$ の $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ に関する座標をそれぞれ $[\boldsymbol{a}]_{\mathcal{A}}, [\boldsymbol{a}]_{\mathcal{A}'}$ とすると，

$$[\boldsymbol{a}]_{\mathcal{A}} = P[\boldsymbol{a}]_{\mathcal{A}'}$$

が成り立つ．
また，P は正則行列で，$\mathcal{A}'$ から $\mathcal{A}$ への基底変換行列は P^{-1} である．

〈基底の変換と表現行列〉　（線形教科書 p.164–166）

- $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ を V の基底とし，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}'$ への基底変換行列を P とする．
- $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ を W の基底とし，$\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}'$ への基底変換行列を Q とする．
- $f\colon V \to W$ を線形写像とし，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する f の表現行列を A とする．

このとき，$\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ に関する f の表現行列を A' とすると，

$$A' = Q^{-1}AP$$

が成り立つ．

$\boxed{\text{演習問題}}$

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) 次で与えられる $\mathbb{R}^2$ の 2 つの基底 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ について，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列を求めよ．

$$\mathcal{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right), \qquad \mathcal{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + 2z = 0 \right\}$ の 2 つの基底を考える．

$$\mathcal{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right), \qquad \mathcal{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

(i) $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列を求めよ．

(ii) $\boldsymbol{x} \in W$ の $\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}}$ が $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ のとき，$\mathcal{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ を a, b で表せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次で与えられる $\mathbb{R}^3$ のベクトルを考える．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 18 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

(1) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ に関する，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の座標をそれぞれ求めよ．

(2) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を次で定義する．

$$f(\boldsymbol{a}_1) = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{a}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{a}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathcal{F} = \left(\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ を考え，$\mathcal{F}$ に関する，$f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), f(\boldsymbol{a}_3)$ の座標を求めることにより，$\mathcal{A}, \mathcal{F}$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ について，$\mathcal{B}, \mathcal{F}$ に関する f の表現行列 B を求めよ．

(4) 線形写像 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -x - 2y \\ -4x - 4y \\ 5x + 12y \end{bmatrix}$$

で定義する．$\mathcal{F}, \mathcal{A}$ に関する g の表現行列 M を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ ベクトル空間 V の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ とベクトル空間 W の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$ に対し，線形写像 $f : V \to W$ を

$$f(\boldsymbol{a}_1) = -\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4, \quad f(\boldsymbol{a}_2) = 3\boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_3 - 3\boldsymbol{b}_4, \quad f(\boldsymbol{a}_3) = -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_3 + 2\boldsymbol{b}_4,$$

で定義する.

(1) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する f の表現行列 A を求めよ.

(2) A を用いて，$\mathrm{Ker}\, f$ の次元と基底を一組求めよ．また，$\mathrm{Im}\, f$ の次元と基底を一組求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 2 次以下の実数係数 1 変数多項式全体のなすベクトル空間を $\mathbb{R}[x]_2$ とかく．線形変換 $L : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ を次で定義する.（第 9 回の $\boxed{\mathbf{5}}$ と同じ写像）

$$L(p(x)) = 2p(x) - (x+1)p'(x) \quad (p(x) \in \mathbb{R}[x]_2)$$

(1) $\mathbb{R}[x]_2$ の基底 $\mathcal{A} = (1, x, x^2)$ に関する L の表現行列 A を求めよ.

(2) $\mathbb{R}[x]_2$ の別の基底 $\mathcal{B} = (1+x, x+x^2, x^2)$ に関する L の表現行列を求めよ.

レポート課題

- **答だけでなく，計算の過程も**書いて下さい．（A4 用紙１〜２枚にまとめ, pdf ファイルに変換して提出）
- 授業に出席し, レポートを授業翌日までに **WebClass に提出** して「出席」となります.

$\boxed{\mathbf{0}}$ $\mathbb{R}^3$ の 2 つの基底

$$\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

を考える．また，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

で定義する.

(1) 基底 $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列を求めよ.

(2) $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ を求めよ.

(3) 基底 $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列を求めよ.

(4) 基底 $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列を求めよ.