数学演習第二 (第11回) 【解答例】

線形：線形写像の表現行列，基底変換行列，表現行列と座標　2024 年 1 月 10 日 実施分

演習問題

$\boxed{1}$ (1) $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]P$ となる $P = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]^{-1}[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$.

(2)(i) $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]P$ となる P を求めるには，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2)$ なる c_1, c_2 を求めればよい．言い換えると，$P = [[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}, [\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}}]$ である．$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 | \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \to$
$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ より，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ とわかるから，
$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(ii) 座標の間の関係は，$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}} = P[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ であることに注意すれば，
$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ -a - b \end{bmatrix}$.

$\boxed{2}$ まず逆行列を準備しておく．

$$M_1 = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3], \quad M_1^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2], \quad M_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) $M_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を解けばよい．$M_1^{-1}[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ の各列ベクトルが $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の $\mathcal{A}$ に関する座標なので，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{b}_3]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$.

(2) $f(\boldsymbol{a}_i)$ の $\mathcal{F}$ に関する座標を求めるには，$M_2\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{a}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ を解けばよい．
$M_2^{-1}[f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), f(\boldsymbol{a}_3)] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ であり，この各列が $f(\boldsymbol{a}_i)$ の $\mathcal{F}$ に関する座標を与えるので，$\mathcal{A}, \mathcal{F}$ に関する表現行列は $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(3) f の線形性と (1) から，$f(\boldsymbol{b}_1) = f(\boldsymbol{a}_2) - f(\boldsymbol{a}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, f(\boldsymbol{b}_2) = 7f(\boldsymbol{a}_1) - 3f(\boldsymbol{a}_2) = \begin{bmatrix} 26 \\ -4 \end{bmatrix}, f(\boldsymbol{b}_3) = 2f(\boldsymbol{a}_1) - 3f(\boldsymbol{a}_3) = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$．これらの $\mathcal{F}$ に関する座標は，$M_2^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 26 & 7 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 4 \\ 1 & 15 & 3 \end{bmatrix}$ の各列ベクトルになる．よって求める表現行列は，$\begin{bmatrix} 1 & 11 & 4 \\ 1 & 15 & 3 \end{bmatrix}$.

(4) $g(\boldsymbol{v}_1) = \begin{bmatrix} -3 \\ -8 \\ 17 \end{bmatrix}, g(\boldsymbol{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$．それぞれの $\mathcal{A}$ に関する座標を求めるには，$M_1\boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{v}_i)$ $(i = 1, 2)$ を解けばよい．$M_1^{-1} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 0 \\ 17 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -8 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ の各列が $\mathcal{A}$ に関する座標を与えるので，求める表現行列 $M = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -8 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{3}$ (1) 表現行列の定義から，$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ である．(2) A を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるので，$\dim N(A) = 1$ で基底の一例として $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ が取れる．$\dim C(A) = 2$ で基底の一例として $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ が取れる．これを V, W の元として書けば，$\dim \operatorname{Ker} f = 1$ で基底として $(3\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)$ が取れ，$\dim \operatorname{Im} f = 2$ で基底として $(-\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4, -2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_3 + 2\boldsymbol{b}_4)$ が取れる.（なお，$\operatorname{Im} f$ の基底はもう少し簡単に $(-\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{b}_2)$ とも取れる.）

$\boxed{4}$ (1) $L(1) = 2, L(x) = x - 1, L(x^2) = -2x$ より，表現行列は $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) $L(1 + x) = 1 + x, L(x + x^2) = -(1 + x), L(x^2) = -2(x + x^2) + 2x^2$ より，$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ を用いて，$P^{-1}AP$ と求めてもよい.

レポート問題

$\boxed{0}$

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} P$ となる行列 P を求めればよい．

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

より，$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

(2) (1) の P の第 1 列を用いると，$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とわかるので，

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + 2f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(3) $\left[f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} M$ となる M を求めればよい．

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

より，$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

(4) $P^{-1}MP = P^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ が求める表現行列である．

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

より，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ が求める表現行列.

［注］ (2) で見たように $\mathcal{B}$ の元の行き先を直接計算できる．

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \overset{P\text{ の第 2 列}}{=} f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - 2f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

から求めてもよい．