数学演習第二（演習 第12回）　【解答例】

微積：重積分 [2]（重積分の変数変換）　2024 年 1 月 17 日

【演習問題】

1 (1) $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ より，$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$. よって，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\left(\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{(ad-bc)^2}\begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = \boxed{\frac{1}{ad-bc}}.$$

実は，一般に $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left[\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right]^{-1}$ が成り立つので，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}$ と計算してもよい.

(2) $y = uv$, $x = u - y = u(1-v)$ であるから，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = (1-v)u + uv = \boxed{u}$.

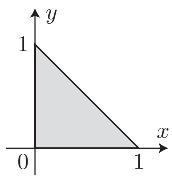
(3) $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos^n\theta & -nar\cos^{n-1}\theta\sin\theta \\ b\sin^n\theta & nbr\sin^{n-1}\theta\cos\theta \end{vmatrix} = a\cos^{n-1}\theta\cdot b\sin^{n-1}\theta\cdot nr\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \boxed{nab\,r(\cos\theta\sin\theta)^{n-1}}$.

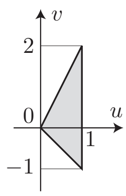
(4) $$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & ar\cos\theta\cos\varphi & -ar\sin\theta\sin\varphi \\ b\sin\theta\sin\varphi & br\cos\theta\sin\varphi & br\sin\theta\cos\varphi \\ c\cos\theta & -cr\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = abc\,r^2\sin\theta\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$
$$= abc\,r^2\sin\theta\,(\cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi) = \boxed{abc\,r^2\sin\theta}.$$

2 (1) $u = x+y$, $v = x-y$ とおけば，$x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & -\frac12 \end{vmatrix} = -\dfrac12$ であり，D は $1 \leqslant u \leqslant 2$, $|v| \leqslant 1$ に対応する. よって，

$$I_1 = \iint_{\substack{1\leqslant u\leqslant 2\\ -1\leqslant v\leqslant 1}} \frac12(u+v)\log u\cdot\left|-\frac12\right| dudv = \frac14\int_1^2 du\int_{-1}^1 (u+v)\log u\,dv = \frac12\int_1^2 u\log u\,du$$
$$= \frac12\left(\left[\frac12 u^2\log u\right]_1^2 - \frac12\int_1^2 u^2\cdot\frac1u\,du\right) = \frac12\left(2\log 2 - \frac12\int_1^2 u\,du\right) = \log 2 - \frac14\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 = \boxed{\log 2 - \frac38}.$$

(2) $u = x+y$, $v = 2x-y$ とおけば，$x = \dfrac{u+v}{3}$, $y = \dfrac{2u-v}{3}$, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac13 & \frac13 \\ \frac13 & -\frac23 \end{vmatrix} = -\dfrac13$. このとき D は $0 \leqslant u \leqslant 1$, $-u \leqslant v \leqslant 2u$ に対応する (三角形の頂点の対応に注目) から，



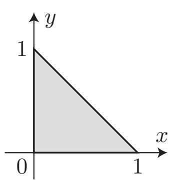


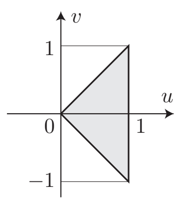
$$I_2 = \iint_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\ -u\leqslant v\leqslant 2u}} \frac{v^2}{1+u^4}\cdot\frac13\,dudv = \frac13\int_0^1 du\int_{-u}^{2u}\frac{v^2}{1+u^4}\,dv$$
$$= \frac13\int_0^1\left[\frac13\frac{v^3}{1+u^4}\right]_{v=-u}^{v=2u} du = \frac19\int_0^1\frac{9u^3}{1+u^4}\,du = \left[\frac14\log(1+u^4)\right]_0^1 = \boxed{\frac14\log 2}.$$

(3) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (極座標変換) とおけば，

$$I_3 = \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2}} r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2\cdot r\,drd\theta = \left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}(1+2\cos\theta\sin\theta)\,d\theta\right)$$
$$= \frac14\left[\theta + \sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac14\left(\frac\pi2 + 1\right) = \boxed{\frac{\pi+2}{8}}.$$

(4) $u = x+y$, $v = x-y$ とおけば，$x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & -\frac12 \end{vmatrix} = -\dfrac12$. このとき D は $0 \leqslant u \leqslant 1$, $-u \leqslant v \leqslant u$ に対応する (三角形の頂点の対応に注目) から，





$$I_4 = \iint_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\ -u\leqslant v\leqslant u}} \frac{\sqrt{u^2-v^2}}{2}\cdot\left|-\frac12\right| dudv = \frac14\int_0^1 du\underbrace{\int_{-u}^u\sqrt{u^2-v^2}\,dv}_{\text{半径 } u \text{ の半円の面積}} = \frac14\int_0^1\frac\pi2 u^2\,du = \boxed{\frac{\pi}{24}}.$$

【別法】累次積分でも計算できる.

$$I_4=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\sqrt{xy}\,dy=\frac{2}{3}\int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{3/2}\,dx\overset{x=\sin^2 t}{=}\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\sin t\cos^3 t\cdot 2\sin t\cos t\,dt$$
$$=\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^4 t\,dt=\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}(\cos^4 t-\cos^6 t)\,dt=\frac{4}{3}\left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}-\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{24}.$$

あるいは, $x=r\cos^2\theta$, $y=r\sin^2\theta$ とおいて, $I_4=\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2}} r\cos\theta\sin\theta\cdot 2r\cos\theta\sin\theta\,d\theta$ と計算してもよい.

(5) $u=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{y}$ とおけば, $x=u^2$, $y=v^2$, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=4uv$ で, D は $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, $u+v\leqslant 1$ に対応する.

$$I_5=\iint_{\substack{u\geqslant 0,v\geqslant 0\\ u+v\leqslant 1}} u^2v^2\cdot 4uv\,dudv=4\int_0^1 du\int_0^{1-u}u^3v^3\,dv=\int_0^1 u^3(1-u)^4\,du\ \left(=B(4,5)=\frac{3!4!}{8!}\right)$$
$$=\left[-\frac{1}{5}u^3(1-u)^5\right]_0^1+\frac{3}{5}\int_0^1 u^2(1-u)^5\,du=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}\int_0^1 u(1-u)^6\,du=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}\int_0^1(1-u)^7\,du=\boxed{\frac{1}{280}}.$$

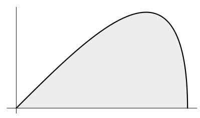
【別法】$x=r\cos^4\theta$, $y=r\sin^4\theta$ とおけば, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=4r(\cos\theta\sin\theta)^3$ であるから,

$$I_5=\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2}}(r\cos^4\theta)(r\sin^4\theta)\cdot 4r(\cos\theta\sin\theta)^3\,drd\theta=4\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^7 d\theta\right)$$
$$=\frac{1}{128}\int_0^{\pi}\sin^7\varphi\,\frac{d\varphi}{2}=\frac{1}{128}\int_0^{\pi/2}\sin^7\varphi\,d\varphi=\frac{1}{128}\cdot\frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}=\frac{1}{280}.$$

(6) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ (極座標変換) とおけば, D は $0\leqslant r\leqslant\cos\theta$, $-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ に対応するから,

$$I_6=\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant\cos\theta\\ -\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2}}\sqrt{1-r^2}\,r\,drd\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{\cos\theta}r\sqrt{1-r^2}\,dr=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^{r=\cos\theta}d\theta$$
$$=\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-|\sin\theta|^3)\,d\theta=\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,d\theta=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)=\boxed{\frac{\pi}{3}-\frac{4}{9}}.$$

(7) 与えられた曲線を $y=f(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ と表せば,



$$I_7=\int_0^1 dx\int_0^{f(x)}x\,dy=\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^{\pi/2}xy\frac{dx}{dt}\,dt=\int_0^{\pi/2}t\cos^2 t\sin t\,dt$$
$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}t\,(\cos^3 t)'\,dt=\frac{1}{3}\left(-\Big[t\,\cos^3 t\Big]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\cos^3 t\,dt\right)=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3 t\,dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\boxed{\frac{2}{9}}.$$

【別法】 $x=\sin t$, $y=st\cos t$ $(0\leqslant s\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant\pi/2)$ で変数変換する. $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=-t\cos^2 t$ より,

$$I_7=\iint_{\substack{0\leqslant s\leqslant 1\\ 0\leqslant t\leqslant\pi/2}}\sin t\cdot t\cos^2 t\,dsdt=\int_0^{\pi/2}t\cos^2 t\sin t\,dt=\frac{2}{9}.$$

3 (1) $u=x+y$, $v=y+z$, $w=z+x$ とおくと, $u+v+w=2(x+y+z)$ より, $x=\dfrac{u+v+w}{2}-v=\dfrac{u-v+w}{2}$,

$y=\dfrac{u+v-w}{2}$, $z=\dfrac{-u+v+w}{2}$ となり, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}=\dfrac{1}{8}\begin{vmatrix}1&-1&1\\ 1&1&-1\\ -1&1&1\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}$. よって,

$$J_1=\iiint_E\frac{u-v+w}{2}\cdot\frac{u+v-w}{2}\cdot\frac{-u+v+w}{2}\cdot\frac{1}{2}\,dudvdw\quad(E:\ 0\leqslant u\leqslant 1,\ 0\leqslant v\leqslant 1,\ 0\leqslant w\leqslant 1)$$
$$=\frac{1}{16}\iiint_E\{-(u^3+v^3+w^3)+(u^2v+uv^2+v^2w+vw^2+w^2u+wu^2)-2uvw\}\,dudvdw$$
$$=\frac{1}{16}\left(-3\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{6}-2\cdot\frac{1}{8}\right)du=\boxed{0}.$$

(2) $x\leqslant z\leqslant 2x$ となる z が存在するとき $x\geqslant 0$ であるから,

$$J_2=\iint_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0}}dxdy\int_x^{2x}xz\,dz=\iint_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0}}\left[\frac{1}{2}xz^2\right]_{z=x}^{z=2x}dxdy=\frac{3}{2}\iint_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0}}x^3\,dxdy$$
$$\overset{\text{極座標変換}}{=}\frac{3}{2}\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant a\\ -\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2}}r^3\cos^3\theta\cdot r\,drd\theta=\frac{3}{2}\left(\int_0^a r^4\,dr\right)\left(2\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{a^5}{5}\cdot\frac{4}{3}=\boxed{\frac{2a^5}{5}}.$$

【別法】 極座標変換を用いずに $\iint_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0}}x^3\,dxdy=\int_{-a}^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}x^3\,dx$ と累次積分で計算してもよい.

(3) 空間の極座標変換 $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ を用いて,

$$J_3 = \iiint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} \sqrt{1-r^2}\, r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi = \left(\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)$$

$$= 4\pi\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,dr = 4\pi\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos t\cdot\cos t\,dt \quad (r=\sin t)$$

$$= \pi\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = \pi\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \pi\cdot\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\sin 4t\right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}.$$

(4) 空間の極座標変換 $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ を用いて,

$$J_4 = \iiint_{\substack{a\leqslant r\leqslant b\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} \frac{1}{r^p}\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \left(\int_a^b r^{2-p}\,dr\right)\left(\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)$$

$$= \boxed{\begin{cases}\dfrac{4\pi}{p-3}\left(a^{3-p}-b^{3-p}\right) & (p\neq 3\text{ のとき})\\ 4\pi\log\dfrac{b}{a} & (p=3\text{ のとき})\end{cases}}.$$

4 (1) $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ を極座標 (r,θ) で表すと $(r^2)^2 = (r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2 = r^2\cos 2\theta$, 整理して $r=\sqrt{\cos 2\theta}$. よって, 曲線が囲む部分は $0\leqslant r\leqslant\sqrt{\cos 2\theta}$ (θ は $\cos 2\theta\geqslant 0$ となる範囲) と表される (微積教科書 p.121 の下に図がある). 曲線が x 軸, y 軸に関して対称であることは方程式から明らかであるから, 第 1 象限にある部分 $0\leqslant r\leqslant\sqrt{\cos 2\theta}$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi/4)$ の面積を 4 倍すれば求める面積 (S_1 とする) になる.

$$S_1 = 4\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant\sqrt{\cos 2\theta}\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/4}} r\,drd\theta = 4\int_0^{\pi/4}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr = 4\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\left(\sqrt{\cos 2\theta}\right)^2 d\theta = 2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,d\theta = \boxed{1}.$$

(2) この曲線も x 軸および y 軸に関して対称であり, 第 1 象限においてこの曲線と座標軸の囲む部分の面積を 4 倍すれば求める面積 (S_2 とする) になる. $x = ar\cos^3\theta$, $y = br\sin^3\theta$ とおけば,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos^3\theta & -3ar\cos^2\theta\sin\theta\\ b\sin^3\theta & 3br\sin^2\theta\cos\theta\end{vmatrix} = 3ab\,r(\cos\theta\sin\theta)^2 = \frac{3ab}{4}r\sin^2 2\theta$$

であるから, 求める面積は

$$S_2 = \iint_{(x/a)^{2/3}+(y/b)^{2/3}\leqslant 1} dxdy = 4\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2}}\frac{3ab}{4}r\sin^2 2\theta\,drd\theta$$

$$= 3ab\left(\int_0^1 r\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,d\theta\right) = 3ab\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta = \boxed{\frac{3}{8}\pi ab}.$$

(3) 考えている部分は $0\leqslant z\leqslant 1-\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2\leqslant x$ と表される. 円板 $x^2+y^2\leqslant x$ は円板 $x^2+y^2\leqslant 1$ に含まれるから, 求める体積 V_3 は

$$V_3 = \iint_{x^2+y^2\leqslant x} dxdy\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} dz = \iint_{x^2+y^2\leqslant x}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy.$$

ここで, $x^2+y^2\leqslant x$ は極座標 (r,θ) を用いて $0\leqslant r\leqslant\cos\theta$ $(-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$ と表されるから,

$$V_3 = \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant\cos\theta\\ -\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2}}(1-r)r\,drd\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{\cos\theta}(r-r^2)\,dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\cos^2\theta-\frac{2}{3}\cos^3\theta\right)d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \boxed{\frac{\pi}{4}-\frac{4}{9}}.$$

(4) 放物面と平面で囲まれた部分 E_1 : $2x\leqslant z\leqslant 1-x^2-y^2$ の体積を V_{41} とし, E_1 のうちで $x\geqslant 0$ となる部分 $E_2 : 0\leqslant 2x\leqslant z\leqslant 1-x^2-y^2$ の体積を V_{42} とする. E_1 においては $2x\leqslant 1-x^2-y^2$ であるから,

$$V_{41} = \iiint_{2x\leqslant z\leqslant 1-x^2-y^2} dxdydz = \iint_{2x\leqslant 1-x^2-y^2} dxdy\int_{2x}^{1-x^2-y^2} dz$$

$$= \iint_{(x+1)^2+y^2\leqslant 2}\{2-(x+1)^2-y^2\}\,dxdy.$$

ここで, $(-1,0)$ を中心とする極座標 (r,θ) をとれば, $x+1=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ であるから,

$$V_{41}=\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}\\0\leqslant\theta\leqslant2\pi}}(2-r^2)\,r\,drd\theta=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}(2r-r^3)\,dr=2\pi\Big[\,r^2-\frac{r^4}{4}\,\Big]_0^{\sqrt{2}}=\boxed{2\pi}.$$

次に, E_2 を極座標で表す. 条件 $x\geqslant0$ は $x+1=r\cos\theta\geqslant1$, すなわち $\dfrac{1}{\cos\theta}\leqslant r\,(\leqslant\sqrt{2}\,)$ と表され, θ の範囲は $-\pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/4$ に限定される. よって,

$$\begin{aligned}V_{42}&=\iint_{\substack{\frac{1}{\cos\theta}\leqslant r\leqslant\sqrt{2}\\-\pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/4}}(2-r^2)\,r\,drd\theta=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\sqrt{2}}(2r-r^3)\,dr=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\Big[\,r^2-\frac{r^4}{4}\,\Big]_{r=\frac{1}{\cos\theta}}^{r=\sqrt{2}}d\theta\\&=2\int_0^{\pi/4}\Big(1-\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{4\cos^4\theta}\Big)\,d\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\{-4+(1+\tan^2\theta)\}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\\&=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\Big[-3\tan\theta+\frac{1}{3}\tan^3\theta\Big]_0^{\pi/4}=\boxed{\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}}.\end{aligned}$$

(5) $(x^2+y^2+z^2)^2=z$ を空間の極座標 (r,θ,φ) を用いて表すと, $(r^2)^2=r\cos\theta$ より $r=(\cos\theta)^{1/3}$. このとき, $\cos\theta\geqslant0$ であるから $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$. また, φ は制限を受けないので $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$. よって, 求める体積 V_5 は

$$\begin{aligned}V_5&=\iiint_{(x^2+y^2+z^2)^2\leqslant z}dxdydz=\iiint_{\substack{0\leqslant r\leqslant(\cos\theta)^{1/3}\\0\leqslant\theta\leqslant\pi/2\\0\leqslant\varphi\leqslant2\pi}}r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi=2\pi\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant(\cos\theta)^{1/3}\\0\leqslant\theta\leqslant\pi/2}}r^2\sin\theta\,drd\theta\\&=2\pi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{(\cos\theta)^{1/3}}r^2\sin\theta\,dr=2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{1}{3}\cos\theta\sin\theta\,d\theta=\frac{\pi}{3}\Big[\,\sin^2\theta\,\Big]_0^{\pi/2}=\boxed{\frac{\pi}{3}}.\end{aligned}$$

【レポート課題】(オンライン提出)

1 (1) D は 3 直線 $y=x,\ y=2x,\ 2x+y=1$ で囲まれた三角形となる．各直線の交点を計算すると，D の頂点は $\boxed{(0,0),\Big(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\Big),\Big(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\Big)}$.

(2) D の頂点を Φ でうつした点が $\Phi(D)$ の頂点となる．$\Phi(0,0)=(0,0)$, $\Phi\Big(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\Big)=(1,0)$, $\Phi\Big(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\Big)=\Big(1,\dfrac{1}{4}\Big)$ より，$\Phi(D)$ の頂点は $\boxed{(0,0),(1,0),\Big(1,\frac{1}{4}\Big)}$.

(3) (2) より，$\Phi(D)$ は $0\leqslant u\leqslant1,\ 0\leqslant v\leqslant\dfrac{1}{4}u$ となる．$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\left[\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right]^{-1}=\begin{vmatrix}2&1\\-1&1\end{vmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{3}$ より，

$$I=\frac{1}{3}\iint_{\substack{0\leqslant u\leqslant1\\0\leqslant v\leqslant\frac{1}{4}u}}e^{-u^2}dudv=\frac{1}{3}\int_0^1du\int_0^{\frac{1}{4}u}e^{-u^2}dv=\frac{1}{12}\int_0^1ue^{-u^2}du=\frac{1}{24}\big[-e^{-u^2}\big]_0^1=\boxed{\frac{1}{24}(1-e^{-1})}.$$

2 (1) D は極座標で $0\leqslant r\leqslant1,\ -\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}$ と表される．$dxdy=rdrd\theta$ より，

$$J_1=\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant1\\-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}}}r\cos\theta\cdot rdrd\theta=2\int_0^1r^2dr\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta=2\Big[\frac{1}{3}r^3\Big]_0^1\cdot\big[\sin\theta\big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}}.$$

(2) V は極座標で $1\leqslant r\leqslant2,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ と表される．$dxdydz=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ より，

$$\begin{aligned}J_2&=\iiint_{\substack{1\leqslant r\leqslant2\\0\leqslant\theta\leqslant\pi\\0\leqslant\varphi\leqslant2\pi}}r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\theta drd\theta d\varphi=\int_1^2r^4dr\int_0^\pi\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\\&=\int_1^2r^4dr\int_0^\pi(1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos2\varphi}{2}d\varphi\\&=\Big[\frac{1}{5}r^5\Big]_0^2\cdot\Big[-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big]_0^\pi\cdot\Big[\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\sin2\varphi\Big]_0^{2\pi}=\frac{31}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi=\boxed{\frac{124}{15}\pi}.\end{aligned}$$

注: 回転対称性により，$\displaystyle\iiint_V z^2\,dxdydz$ や $\displaystyle\frac{1}{3}\iiint_V(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$ を計算してもよい. (計算が多少簡単になる.)