数学演習第二（演習第 13 回）【解答例】

線形： 行列と線形変換の固有値，表現行列の対角化　　2024 年 1 月 24 日

【授業中の演習問題の解答例】

1　(a) について

(1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 \\ 1 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda-2 = (\lambda+2)(\lambda-1)$. A の固有値は $\lambda = -2, 1$.

(2) $\underline{\lambda = -2 \text{ に対して}}$: $-2E-A = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$(-2E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数)．よって，V_{-2} の基底は $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. $\underline{\lambda = 1 \text{ に対して}}$: $E-A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$(E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数)．よって，V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

(3) $P = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) について

(1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2(\lambda-1)$. A の固有値は $\lambda = 1, 3$.

(2) $\underline{\lambda = 1 \text{ に対して}}$: $E-A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$(E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数)．よって，V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. $\underline{\lambda = 3 \text{ に対して}}$: $3E-A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$(3E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s, t は任意定数)．よって，V_3 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

(3) $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば，命題 13.6 (ii) から, 基本解は 1 次独立なので, P は正則で, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

勿論, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ でも対角化は変わらない.

(c) について

(1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 4 & -4 \\ -2 & \lambda-6 & 4 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda-6 & 4 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3$. A の固有値は $\lambda = 2$.

(2) $\underline{\lambda = 2 \text{ に対して}}$: $2E-A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(2E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s, t は任意定数)．よって, V_2 の基底は $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

(3) $\dim V_2 = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ であるから, (c) の A は対角化可能でない.

2　$\boldsymbol{y}(t) = P^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ ($\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{y}(t)$) とおくと，$P$ は定数行列なので，方程式 $\boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t)$ は方程式 $\boldsymbol{y}'(t) = P^{-1}AP\,\boldsymbol{y}(t)$ に変換され，$P^{-1}AP$ は対角行列のため，単独の斉次線形微分方程式 $y_1'(t) = y_1(t)$, $y_j'(t) = 3\,y_j(t)$ $(j = 2, 3)$ に帰着されるから, y_1, y_2, y_3 は独立に解ける．つまり, 講義「解析学」で学んだように, 一般解 $y_1(t) = C_1\,e^t$, $y_j(t) = C_j\,e^{3t}$ $(j = 2, 3)$ を得る．但し, C_1, C_2, C_3 は任意の定数を表す．よって, 求める一般解は

$$\boldsymbol{x}(t) = P\,\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1\,e^t \\ C_2\,e^{3t} \\ C_3\,e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C_1\,e^t + (C_2+C_3)\,e^{3t} \\ -C_1\,e^t + C_2\,e^{3t} \\ C_1\,e^t + C_3\,e^{3t} \end{bmatrix}.$$

【レポート課題の解答例】

$\boxed{3}$ (1) f の固有値は行列 A の固有値と一致するので, A の固有多項式 $F_A(\lambda)$ を因数分解する.

$$F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

より, 求めるすべての固有値は $\boxed{1,\ 3}$.

(2) $\lambda=1$ のとき： $E_3 - A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $V_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$. V_1 の基底は $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}$.

$\lambda=3$ のとき： $3E_3 - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$. V_2 の基底は $\boxed{\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}$.

(3) (2) の結果より $\dim V_1 + \dim V_2 = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ なので, f は対角化可能でない (線形教科書の定理 24.6).

(4) $\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P = [\,\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3]$ とおけば, (2) の結果と $A\boldsymbol{p}_3 = -\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_3 + 3\boldsymbol{p}_2$ に注意して,

$$AP = [\,A\boldsymbol{p}_1\ \ A\boldsymbol{p}_2\ \ A\boldsymbol{p}_3] = [\,3\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ -\boldsymbol{p}_1 + 3\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3] = [\,\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3] \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

このとき, P は正則であるから, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる. そこで, $\boldsymbol{y}(t) = P^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ とおいて, $\boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{y}(t)$ を方程式 $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ に代入すると, P は定数行列なので, $P\boldsymbol{y}'(t) = AP\boldsymbol{y}(t)$ より, $\boldsymbol{y}'(t) = P^{-1}AP\boldsymbol{y}(t)$ を得る. よって, 連立の線形微分方程式 $y_1'(t) = 3y_1(t) - y_3(t)$, $y_2'(t) = y_2(t) + 3y_3(t)$, $y_3'(t) = y_3(t)$ に変換されるが, $P^{-1}AP$ は上三角行列のため, y_3, y_2, y_1 の順に解ける. 実際, 最初に一般解 $y_3(t) = 2C_3e^t$ が得られる. 次に, よく知られているように, $y_1'(t) = 3y_1(t) - 2C_3e^t$, $y_2'(t) = y_2(t) + 6C_3e^t$ をそれぞれ $\dfrac{d}{dt}(e^{-3t}y_1(t)) = -2C_3e^{-2t}$, $\dfrac{d}{dt}(e^{-t}y_2(t)) = 6C_3$ と変形して, t で積分することにより,
$y_1(t) = (C_1 + C_3e^{-2t})e^{3t}$, $y_2(t) = (C_2 + 6C_3t)e^t$ がわかる. 但し, C_1, C_2, C_3 は任意の定数を表す. よって,

$$\boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1e^{3t} + C_3e^t \\ (C_2 + 6C_3t)e^t \\ 2C_3e^t \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -C_1e^{3t} - C_3e^t \\ C_1e^{3t} + (C_2 + C_3 + 6C_3t)e^t \\ 2C_3e^t \end{bmatrix}}.$$

【注】一般に, 複素数成分の正方行列 M は対角化できなくても, 三角化可能 (適当な正則行列 P に対し $P^{-1}MP$ が三角行列) であることが知られている. 斉次線形微分方程式 $\boldsymbol{x}'(t) = M\boldsymbol{x}(t)$ を解くには三角化できれば十分.

【それ以外の自習用問題の解答例】

$\boxed{4}$ $\boxed{\text{(a) について}}$

(1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-8 & 9 \\ -6 & \lambda+7 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$. A の固有値は $\lambda = -1, 2$.

(2) $\underline{\lambda = -1 \text{ に対して}}$: $-E - A = \begin{bmatrix} -9 & 9 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(-E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_{-1} の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $\underline{\lambda = 2 \text{ に対して}}$: $2E - A = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(2E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_2 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

(3) $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{(b) について}}$

(1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 & -5 \\ -1 & \lambda-2 & -3 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. A の固有値は $\lambda = 1, 2, 3$.

(2) $\underline{\lambda=1 \text{ に対して}}$: $E-A=\begin{bmatrix}-3&1&-5\\-1&-1&-3\\1&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ より, $(E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$. $\underline{\lambda=2 \text{ に対して}}$: $2E-A=\begin{bmatrix}-2&1&-5\\-1&0&-3\\1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ より, $(2E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_2 の基底は $\left(\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$. $\underline{\lambda=3 \text{ に対して}}$: $3E-A=\begin{bmatrix}-1&1&-5\\-1&1&-3\\1&-1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ より, $(3E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって, V_3 の基底は $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$.

(3) $P=\begin{bmatrix}-2&-3&1\\-1&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{(c) について}}$

(1) $F_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-1\\4&\lambda-5&-2\\-4&4&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=(\lambda-1)^3$. A の固有値は $\lambda=1$.

(2) $\underline{\lambda=1 \text{ に対して}}$: $E-A=\begin{bmatrix}2&-2&-1\\4&-4&-2\\-4&4&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1/2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ より, $(E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解は $\boldsymbol{x}=s\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ (s,t は任意定数). よって, V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\right)$.

(3) $\dim V_1=2<3$ であるから, (c) の A は対角化可能でない.

$\boxed{5}$ $\lambda=0$ のとき, 線形教科書の定理 11.3 から, $|BA|=|AB|=0$ なので, 0 も BA の固有値である. $\lambda\neq0$ のとき, AB の固有値 λ に対する固有ベクトルの 1 つを $\boldsymbol{x}$ とすると, $AB\,\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ をみたすが, $\lambda\neq0$ より, $\lambda\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ のため, $AB\,\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ である. 特に, $B\,\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ で, $BA(B\,\boldsymbol{x})=B(AB\,\boldsymbol{x})=B(\lambda\,\boldsymbol{x})=\lambda(B\,\boldsymbol{x})$ が成り立つ. $\lambda\neq0$ のときも, λ は BA の固有値である.

【参考】一般に, 同じサイズの正方行列 A,B に対して, 等式 $F_{AB}(\lambda)=F_{BA}(\lambda)$ が成り立つ. これを示しておこう.
《方法 1》A,B を n 次正方行列とすると,

$$\begin{bmatrix}E_n&-A\\O&\lambda E_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda E_n&A\\B&E_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda E_n-AB&O\\\lambda B&\lambda E_n\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}E_n&O\\-B&\lambda E_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda E_n&A\\B&E_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda E_n&A\\O&\lambda E_n-BA\end{bmatrix}.$$

ここで, $\begin{vmatrix}E_n&-A\\O&\lambda E_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}E_n&O\\-B&\lambda E_n\end{vmatrix}=\lambda^n$ であるから, 上の 2 式について, それぞれ両辺の行列式をとることにより,

$$\lambda^n\begin{vmatrix}\lambda E_n&A\\B&E_n\end{vmatrix}=\lambda^n|\lambda E_n-AB|=\lambda^n|\lambda E_n-BA|.$$

を得る. よって, $\underline{\lambda \text{ の多項式 (整式) として}}$, $|\lambda E_n-AB|=|\lambda E_n-BA|$, すなわち $F_{AB}(\lambda)=F_{BA}(\lambda)$ が成り立つ.
《方法 2》A が正則のとき, $|\lambda E-AB|=|A||\lambda A^{-1}-B|=|\lambda A^{-1}-B||A|=|\lambda E-BA|$. A が正則でないとき, 正数 ε_1 を十分小さくとれば, $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ に対して $A_\varepsilon:=A+\varepsilon E$ は正則となる (A の固有値を $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ とすれば, A_ε の固有値は $\lambda_1+\varepsilon,\ldots,\lambda_n+\varepsilon$ となることに注意). このとき, $|\lambda E-A_\varepsilon B|=|\lambda E-BA_\varepsilon|$ が成り立つので, $\varepsilon\to+0$ とすることにより, $|\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|$ を得る (n 次正方行列 M の行列式 $|M|$ は M の各成分を変数とする n^2 変数多項式, 従って各成分に関して連続であることに注意). よって, $F_{AB}(\lambda)=F_{BA}(\lambda)$ が示された.

$\boxed{6}$ (1) $(A\boldsymbol{p}_1,\,\ldots,\,A\boldsymbol{p}_n)=(f(\boldsymbol{p}_1),\,\ldots,\,f(\boldsymbol{p}_n))=(\boldsymbol{p}_1,\,\ldots,\,\boldsymbol{p}_n)D=(\mu_1\boldsymbol{p}_1,\,\ldots,\,\mu_n\boldsymbol{p}_n)$ (2 番目の等号で表現行列の定義を用いた) より, $A\boldsymbol{p}_k=\mu_k\boldsymbol{p}_k$ $(1\leqq k\leqq n)$. $\boldsymbol{p}_k\neq\mathbf{0}$ であるから, μ_k は A の固有値であり, $\boldsymbol{p}_k$ は μ_k に対する固有ベクトルである.

(2) (1) の結果から, $AP = A[\,\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n\,] = [\,A\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ A\boldsymbol{p}_n\,] = [\,\mu_1\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \mu_n\boldsymbol{p}_n\,] = [\,\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n\,]D = PD$. $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ が 1 次独立なので, $P = [\,\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n\,]$ は正則となる. よって, $AP = PD$ から $P^{-1}AP = D$ が従う.

(3) $A = PDP^{-1}$ と書けるから, $F_A(\lambda) = |\lambda E - A| = |P(\lambda E - D)P^{-1}| = |P| \begin{vmatrix} \lambda - \mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda - \mu_n \end{vmatrix} |P^{-1}| = (\lambda - \mu_1)\cdots(\lambda - \mu_n)$. ここで, $|P||P^{-1}| = |PP^{-1}| = |E_n| = 1$ を用いた.

(4) $A = PDP^{-1}$ より $A\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x} \iff (\mu E - D)P^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \mu - \mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \mu - \mu_n \end{bmatrix} P^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であるから, μ は $\mu_1, \ldots, \mu_n$ のいずれかと一致する. $\mu_k = \mu$ となる k を $k_1, \ldots, k_m$ (m が固有値 μ の代数的重複度) とすれば, $\boldsymbol{x} \in V_\mu \iff P^{-1}\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{e}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_m} \rangle \iff \boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{p}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{k_m} \rangle$. よって, $V_\mu = \langle \boldsymbol{p}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{k_m} \rangle$ となり, $\dim V_\mu = m$ が示された.

7 (1) $P^{-1}AP = C$, $P^{-1}BP = D$ とおくと, C, D は対角行列なので, $CD = DC$ が成り立つから

$$AB = (PCP^{-1})(PDP^{-1}) = P(CD)P^{-1} = P(DC)P^{-1} = (PDP^{-1})(PCP^{-1}) = BA.$$

(2) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を A の固有値とし, $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{p}_k \in V_{\lambda_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ とすると

$$A(B\boldsymbol{p}_k) = BA\boldsymbol{p}_k = B(\lambda_k\boldsymbol{p}_k) = \lambda_k(B\boldsymbol{p}_k)$$

より, $B\boldsymbol{p}_k \in V_{\lambda_k}$ を得る. また, 仮定から, $\dim V_{\lambda_k} = 1$ なので, $B\boldsymbol{p}_k = \mu_k\boldsymbol{p}_k$ となる複素数 μ_k が存在する. よって, $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は 1 次独立であるから, $P := [\,\boldsymbol{p}_1\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n\,]$ は正則で, $C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} \mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \mu_n \end{bmatrix}$ とおくと, $\boxed{6}$ (2) と同様に $AP = PC$, $BP = PD$ が成り立つので, $P^{-1}AP = C$, $P^{-1}BP = D$ をみたす.

8 (1) $p = 2\alpha, q = -\alpha^2$ に注意する. $f(\boldsymbol{c}_1) = q\boldsymbol{c}_2$, $f(\boldsymbol{c}_2) = \boldsymbol{c}_1 + p\boldsymbol{c}_2$, $F_A(\alpha) = 0$ および $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2$ の 1 次独立性から,

$$f(\boldsymbol{c}_2) = (p - \alpha)\boldsymbol{c}_2 + (\boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2) = \alpha\boldsymbol{c}_2 + (\boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2),\quad f(\boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2) = \alpha\boldsymbol{c}_1 + (p\alpha + q)\boldsymbol{c}_2 = \alpha(\boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2).$$

(2) 簡単のため, $T = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$ とおくと, $T^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 2\alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}$ である. ここで, $n \geqq 2$ に対して, $T^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n \end{bmatrix}$ を n に関する帰納法で示す. そこで, n での成立を帰納法の仮定とすると

$$T^{n+1} = T^nT = \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{n+1} & 0 \\ (n+1)\alpha^n & \alpha^{n+1} \end{bmatrix}.$$

(3) (1) と (2) の結果より, $n \geqq 1$ に対して

$$(f^n(\boldsymbol{c}_2), f^n(\boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2)) = (\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2)T^n = (\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2) \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n \end{bmatrix}$$

が成り立つ. 特に, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2$ の第 n 項 $(\boldsymbol{c}_2)_n$, $(\boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2)_n$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{c}_2)_n &= (f^{n-1}(\boldsymbol{c}_2))_1 = \alpha^{n-1}(\boldsymbol{c}_2)_1 + (n-1)\alpha^{n-2}(\boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2)_1 = (n-1)\alpha^{n-2}, \\ (\boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2)_n &= (f^{n-1}(\boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2))_1 = \alpha^{n-1}(\boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2)_1 = \alpha^{n-1} \end{aligned}$$

で表される. また, 任意の $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots) \in W$ に対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{c}_1 + a_2\boldsymbol{c}_2 = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= (\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ &= (\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2) \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \alpha\boldsymbol{c}_2) \begin{bmatrix} -\alpha a_1 + a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と書ける. よって, $n \geqq 1$ に対して, $\alpha = \dfrac{p}{2}$ に注意して

$$\begin{aligned} a_n &= (a_2 - \alpha a_1)(n-1)\alpha^{n-2} + a_1\alpha^{n-1} = (2-n)a_1\alpha^{n-1} + (n-1)a_2\alpha^{n-2} \\ &= \left\{ \left(a_2 - \frac{p}{2}a_1 \right) n + (pa_1 - a_2) \right\} \left(\frac{p}{2} \right)^{n-2} \end{aligned}$$

が得られる.