数学演習第二・中間統一試験【解説】

2023 年 11 月 29 日実施 ・ 試験時間 90 分

$\boxed{1}$ (1) $a = \log(1+\sqrt{2}\,)$ のとき, 広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{\cosh x}$ の値を求めよ.

【答】 $\displaystyle\frac{1}{\cosh x} = \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} = \frac{(\sinh x)'}{1+\sinh^2 x}$ より, $\sinh x = u$ とおいて,

$$\int_a^\infty \frac{dx}{\cosh x} = \int_{\sinh a}^\infty \frac{du}{1+u^2} = \Big[\,\mathrm{Tan}^{-1}\, u\,\Big]_{\sinh a}^\infty = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1}(\sinh a).$$

ここで,

$$\sinh a = \frac{e^a - e^{-a}}{2} = \frac{1}{2}\Big(1+\sqrt{2} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{2}\big\{(1+\sqrt{2}\,) - (\sqrt{2}-1)\big\} = 1$$

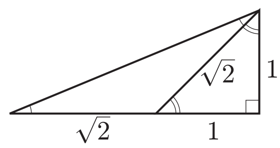
であるから, $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{\cosh x} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1}\, 1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

［**別法**］ $\displaystyle\frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x}+1}$ より, $e^x = v$ とおいて,

$$\int_a^\infty \frac{dx}{\cosh x} = \int_{e^a}^\infty \frac{2\,dv}{v^2+1} = \Big[\,2\,\mathrm{Tan}^{-1}\, v\,\Big]_{e^a}^\infty = 2\Big(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1}\, e^a\Big) = \pi - 2\,\mathrm{Tan}^{-1}(1+\sqrt{2}\,).$$

ここで, 下の【注】により $\mathrm{Tan}^{-1}(1+\sqrt{2}\,) = \dfrac{3\pi}{8}$ であるから, $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{\cosh x} = \pi - 2\cdot\frac{3\pi}{8} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

【注】右図から $\tan\dfrac{3\pi}{8} = \sqrt{2}+1$, $\tan\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$ が分かる.
よって, $\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}+1) = \dfrac{3\pi}{8}$, $\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{2}-1) = \dfrac{\pi}{8}$. 同様な絵を描いて,
$\tan\dfrac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$, $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$ も得られる



$\boxed{2}$ 関数 $f(x,y) = \mathrm{Sin}^{-1}\,\dfrac{y}{x}$ $(|y|<x)$ および $\varphi(t) = t^2+1$, $\psi(t) = 2t$ について考える.

(2) 偏導関数 $f_y(x,y)$ を求めよ.

【答】 $|y|<x$ (従って $x>0$) に制限されているので, $f_y(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}}\cdot\dfrac{1}{x} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}}$.

(3) 2 次偏導関数 $f_{xy}(x,y)$ を求めよ.

【答】 (2) の結果を用いて, $f_{xy}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{(x^2-y^2)^{3/2}} = \boxed{-\dfrac{x}{(x^2-y^2)^{3/2}}}$.

(4) 合成関数 $g(t) = f(\varphi(t),\psi(t))$ $(|t|<1)$ の導関数 $g'(t)$ を求めよ.

【答】 $f(x,y)$ $(|y|<x)$ の偏導関数は

$$f_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(y/x)^2}}\cdot\Big(-\frac{y}{x^2}\Big) = -\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}, \quad f_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

ここで, $x = t^2+1$, $y = 2t$ $(|t|<1)$ とすれば,

$$\sqrt{x^2-y^2} = \sqrt{(t^2+1)^2-(2t)^2} = \sqrt{(t^2-1)^2} = 1-t^2.$$

よって, 合成関数の微分公式を用いて,

$$\begin{aligned} g'(t) &= f_x(x,y)\frac{dx}{dt} + f_y(x,y)\frac{dy}{dt} = -\frac{2t}{(t^2+1)(1-t^2)}\cdot 2t + \frac{1}{1-t^2}\cdot 2 \\ &= \frac{-4t^2+2(t^2+1)}{(t^2+1)(1-t^2)} = \frac{2(1-t^2)}{(t^2+1)(1-t^2)} = \boxed{\frac{2}{t^2+1}}. \end{aligned}$$

［**別法**］ $g(t) = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{2t}{t^2+1}$ $(|t|<1)$ であるから,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2t}{t^2+1})^2}}\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)' = \frac{t^2+1}{\sqrt{(t^2+1)^2-(2t)^2}}\frac{2(t^2+1)-2t\cdot 2t}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(t^2-1)^2}}\frac{2(1-t^2)}{t^2+1} = \frac{1}{1-t^2}\frac{2(1-t^2)}{t^2+1} = \boxed{\frac{2}{t^2+1}}. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ 関数 $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$ および $\varphi(u,v) = u^2-v^2$, $\psi(u,v) = 2uv$ について考える.

(5) 合成関数 $g(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ の $(u,v) = (1,-2)$ における u に関する偏微分係数 $g_u(1,-2)$ を求めよ.

【**答**】 まず, $f(x,y)$ の偏導関数は

$$f_x(x,y) = -\frac{1}{2(x-y)^{3/2}}, \quad f_y(x,y) = \frac{1}{2(x-y)^{3/2}}.$$

合成関数の微分公式を用いて,

$$\begin{aligned} g_u(1,-2) &= f_x(\varphi(1,-2),\psi(1,-2))\varphi_u(1,-2) + f_y(\varphi(1,-2),\psi(1,-2))\psi_u(1,-2) \\ &= f_x(-3,-4)\cdot 2 + f_y(-3,-4)\cdot(-4) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot(-4) = \boxed{-3}. \end{aligned}$$

［**別法**］ $g(u,v) = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-v^2-2uv}}$ であるから,

$$g_u(u,v) = -\frac{1}{2(u^2-v^2-2uv)^{3/2}}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(u^2-v^2-2uv) = -\frac{u-v}{(u^2-v^2-2uv)^{3/2}}.$$

よって, $g_u(1,-2) = -\dfrac{3}{\{1-(-2)^2-2(-2)\}^{3/2}} = \boxed{-3}$.

(6) 変換 $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

【**答**】 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = \boxed{4(u^2+v^2)}$.

$\boxed{4}$ 関数 $f(x,y) = \dfrac{\cos(x+2y)}{1-x+y}$ について考える.

(7) 点 $(0,0,1)$ における曲面 $z = f(x,y)$ の接平面の方程式を $z = ax+by+c$ (a,b,c は定数) の形で求めよ.

【**答**】 (8) のことも考えて, $f(x,y) = \dfrac{\cos(x+2y)}{1-x+y}$ の 2 次までのマクローリン展開を求める.

$$\cos X = 1 - \frac{X^2}{2} + o(X^2), \quad \frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + o(X^2) \quad (X\to\infty)$$

であるから,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{\cos(x+2y)}{1-(x-y)} = \left\{1-\frac{(x+2y)^2}{2}+o(x^2+y^2)\right\}\left\{1+(x-y)+(x-y)^2+o(x^2+y^2)\right\} \\ &= 1+(x-y)+\left\{(x-y)^2-\frac{(x+2y)^2}{2}\right\}+o(x^2+y^2) \\ &= 1+(x-y)+\left(\frac{x^2}{2}-4xy-y^2\right)+o(x^2+y^2). \end{aligned}$$

よって, $z = f(x,y)$ の点 $(0,0,1)$ における接平面の方程式は

$$z = 1+x-y, \quad \text{すなわち} \quad \boxed{z = x-y+1}.$$

［**別法**］ $f(x,y)=\dfrac{\cos(x+2y)}{1-x+y}$ の偏導関数は

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -\frac{\sin(x+2y)}{1-x+y}+\frac{\cos(x+2y)}{(1-x+y)^2}, \\ f_y(x,y) &= -\frac{2\sin(x+2y)}{1-x+y}-\frac{\cos(x+2y)}{(1-x+y)^2}. \end{aligned}$$

よって, $z=f(x,y)$ の $(0,0,1)$ における接平面の方程式は

$$z-1=f_x(0,0)x+f_y(0,0)y=x-y, \quad \text{すなわち} \quad \boxed{z=x-y+1}.$$

(8) 前問の計算を見て, $f(x,y)$ のマクローリン展開の２次の項は $\boxed{\dfrac{1}{2}x^2-4xy-y^2}$.

［**別法**］ $f(x,y)=\dfrac{\cos(x+2y)}{1-x+y}$ の２次偏導関数はライプニッツの公式を用いて

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -\frac{\cos(x+2y)}{1-x+y}-\frac{2\sin(x+2y)}{(1-x+y)^2}+\frac{2\cos(x+2y)}{(1-x+y)^3}, \\ f_{xy}(x,y) &= -\frac{2\cos(x+2y)}{1-x+y}-\frac{\sin(x+2y)}{(1-x+y)^2}-\frac{2\cos(x+2y)}{(1-x+y)^3}, \\ f_{yy}(x,y) &= -\frac{4\cos(x+2y)}{1-x+y}+\frac{4\sin(x+2y)}{(1-x+y)^2}+\frac{2\cos(x+2y)}{(1-x+y)^3}. \end{aligned}$$

これを用いて, $f(x,y)$ のマクローリン展開の２次の項は

$$\frac{1}{2}\{f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\}=\frac{1}{2}(x^2-8xy-2y^2)=\boxed{\frac{1}{2}x^2-4xy-y^2}.$$

$\boxed{5}$ 関数 $f(x,y)=x^2y+y^3+2xy+y^2$ に対する極値問題を考える.

(9) $f(x,y)$ の停留点 (すなわち $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点) をすべて求めよ.

【答】 $f_x(x,y)=2xy+2y=2(x+1)y=0$, $f_y(x,y)=x^2+3y^2+2x+2y=0$ を解く. 第１式より $x=-1$ または $y=0$.

- $x=-1$ を第２式に代入して整理すると $3y^2+2y-1=(3y-1)(y+1)=0$ となり, $y=1/3,-1$.
- $y=0$ を第２式に代入して整理すると $x(x+2)=0$ となり, $x=0,-2$.

よって, $f(x,y)$ の停留点は $\boxed{(-1,1/3),\ (-1,-1),\ (0,0),\ (-2,0)}$.

(10) $f(x,y)$ の極値をすべて求め, 各極値 c に対して「点 (a,b) で極大値 (or 極小値) c をとる」という形で答えよ.

【答】 停留点において

$$D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=2y(6y+2)-(2x+2)^2=4\{y(3y+1)-(x+1)^2\}$$

および $f_{xx}(x,y)=2y$ の符号を調べることにより, 極値の判定を行う. なお, $D(x,y)$, $f_{xx}(x,y)$ はそれぞれ f のヘッセ行列 $\begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$ の行列式, $(1,1)$ 成分に他ならない.

- $D(-1,1/3)=8/3>0$, $f_{xx}(-1,1/3)=2/3>0$ より, f は $(-1,1/3)$ で極小値 $f(-1,1/3)=-5/27$ をとる.
- $D(-1,-1)=8>0$, $f_{xx}(-1,-1)=-2<0$ より, f は $(-1,-1)$ で極大値 $f(-1,-1)=1$ をとる.
- $D(0,0)=-4<0$ より, f は $(0,0)$ で極値をとらない.
- $D(-2,0)=-4<0$ より, f は $(-2,0)$ で極値をとらない.

以上より, 関数 $f(x,y)$ は

- $(-1,1/3)$ で極小値 $-5/27$ をとる.
- $(-1,-1)$ で極大値 1 をとる.

$\boxed{6}$ 空間内で 3 点 $\mathrm{A}(-1,\,2,\,0)$, $\mathrm{B}(1,\,1,\,3)$, $\mathrm{C}(0,\,1,\,-2)$ の定める平面を α とする．また, 原点 O から平面 α に下ろした垂線の足 (すなわち垂線と平面 α との交点) を D とする．

(11) 平面 α の方程式を $ax+by+cz=d$ の形で求めよ．

【答】 平面 α は点 $\mathrm{A}(-1,\,2,\,0)$ を通り, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\7\\-1\end{bmatrix}$ を法線ベクトルとするから, 平面 α の方程式は $5(x+1)+7(y-2)-z=0$, 整理して $\boxed{5x+7y-z=9}$.

(12) 4 点 O, A, B, C を頂点とする四面体の体積を求めよ．

【答】 (四面体 OABC の体積) $=\dfrac{1}{6}$ ($\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の作る平行六面体の体積)

$$=\frac{1}{6}\left|\det\left[\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ \ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right]\right|=\frac{1}{6}\left|\det\begin{bmatrix}-1&1&0\\2&1&1\\0&3&-2\end{bmatrix}\right|=\frac{1}{6}(2+3+4)=\boxed{\frac{3}{2}}.$$

［**別法 1**］ (四面体 OABC の体積) $=\dfrac{1}{6}$ ($\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}},\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ の作る平行六面体の体積)

$$=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{bmatrix}5\\7\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|5-14\right|=\boxed{\frac{3}{2}}.$$

［**別法 2**］ まず, 点 O と平面 α の距離は $\|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\|=\dfrac{|0-9|}{\sqrt{5^2+7^2+(-1)^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{75}}$ であるから,

$$(\text{四面体 OABC の体積})=\frac{1}{3}(\text{三角形 ABC の面積})\|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\|=\frac{1}{6}(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}}\text{ の作る平行四辺形の面積})\|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\|$$

$$=\frac{1}{6}\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|\|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\|=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{75}\cdot\frac{9}{\sqrt{75}}=\boxed{\frac{3}{2}}.$$

(13) 2 点 A, D を通る直線の方程式を求めよ．

【答】 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ は平面 α の法線ベクトル $\begin{bmatrix}5\\7\\-1\end{bmatrix}$ と平行であるから, 点 D の座標は $(5t,7t,-t)$ とおける．また, 点 D は平面 α 上の点であるから, $5\cdot 5t+7\cdot 7t-(-t)=9$. よって, $t=9/75=3/25$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{3}{25}\begin{bmatrix}5\\7\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}40\\-29\\-3\end{bmatrix}\parallel\begin{bmatrix}-40\\29\\3\end{bmatrix}.$$

よって, 直線 AD の方程式は $\boxed{\dfrac{x+1}{-40}=\dfrac{y-2}{29}=\dfrac{z}{3}}$. パラメータ表示してもよい : $\boxed{\begin{cases}x=-40t-1\\y=29t+2\\z=3t\end{cases}}$.

［**別法**］ 次の方法でも $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を計算することができる. $\boldsymbol{n}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|}=\dfrac{1}{\sqrt{75}}\begin{bmatrix}5\\7\\-1\end{bmatrix}$ とおけば,

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\text{ の }\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\text{ を方向ベクトルとする直線への正射影})$$

$$=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}=\frac{9}{75}\begin{bmatrix}5\\7\\-1\end{bmatrix}=\frac{3}{25}\begin{bmatrix}5\\7\\-1\end{bmatrix}.$$

$\boxed{7}$ $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\4\\2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}0\\2\\-4\\k\end{bmatrix}$ によって生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $V=\left\langle\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\boldsymbol{a}_3,\,\boldsymbol{a}_4\right\rangle$ について考える．

(14) $V=\mathbb{R}^4$ となるための実数 k の条件を求めよ.

【答】 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立となればよい. 行基本変形により,

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\2&1&-2&2\\3&4&-1&-4\\2&2&0&k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&-3&-4&2\\0&-2&-4&-4\\0&-2&-2&k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&2&2\\0&-3&-4&2\\0&-2&-2&k\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&2&2\\0&0&2&8\\0&0&2&k+4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&2&2\\0&0&1&4\\0&0&0&k-4\end{bmatrix}.$$

よって, 求める条件は $\boxed{k\neq 4}$.

(15) 実数 k が (14) の条件を満たさないとする. このとき, $\mathscr{A}=\big(\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\boldsymbol{a}_3\big)$ が V の基底ならば $\boldsymbol{a}_4$ の $\mathscr{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{a}_4]_{\mathscr{A}}$ を求め, $\mathscr{A}$ が V の基底でないならば $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\boldsymbol{a}_3$ の非自明な 1 次関係式を求めよ.

【答】 上の変形から $\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2,\,\boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立. k が (14) の条件を満たさなければ $k=4$ であるから,

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&2&2\\0&0&1&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-3&-4\\0&1&2&2\\0&0&1&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&8\\0&1&0&-6\\0&0&1&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

これより $\mathscr{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ は V の基底であり, $\boldsymbol{a}_4$ の基底 $\mathscr{A}$ に関する座標は $[\boldsymbol{a}_4]_{\mathscr{A}}=\boxed{\begin{bmatrix}8\\-6\\4\end{bmatrix}}$.

$\boxed{8}$ $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}-2\\3\\-4\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}2\\1\\-4\end{bmatrix}$ と $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1=\langle\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b}\rangle,\qquad W_2=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;2x+y-4z=0\right\}$$

について考える.

(16) $\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c}$ が 1 次独立ならば「1 次独立」と答え, 1 次従属なら非自明な 1 次関係式を求めよ.

【答】 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{bmatrix}$ を簡約化すると,

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&2\\3&-2&1\\-4&3&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3\\3&-2&1\\-4&3&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&1&-8\\0&-1&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&-8\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

これより, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は 1 次従属で, 非自明な 1 次関係式 $\boxed{5\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}}$ をもつ.

(17) W_2 の次元を求めよ.

【答】 同次連立 1 次方程式 $2x+y-4z=0$ の係数行列は $\begin{bmatrix}2&1&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&-2\end{bmatrix}$ と簡約化されるから, $2x+y-4z=0$ の解は

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}s+2t\\s\\t\end{bmatrix}=\frac{s}{2}\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\quad(s,t\text{ は任意定数}).$$

よって, W_2 は基底 $\left(\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ をもつので, 次元は $\dim W_2=\boxed{2}$.

(18) $W_1\cap W_2$ の基底を求めよ.

【答】 (17) で求めた W_2 の基底を作るベクトルを $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ とする．このとき，行基本変形により

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & | & \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

であるから，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の 1 次関係式は $4\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ とその定数倍に限られる．よって，$W_1 \cap W_2$ は $4\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ で生成され，$\boxed{\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)}$ が $W_1 \cap W_2$ の基底となる．

［別法］ 任意の $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ は $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = d_1\boldsymbol{p} + d_2\boldsymbol{q}$ の形に書ける．このとき，

$$c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} + (-d_1)\boldsymbol{p} + (-d_2)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

であるから，上の基本変形から

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -d_1 \\ -d_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

よって，$W_1 \cap W_2$ は $4\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ で生成され，$\boxed{\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)}$ を基底とすることが分かる．

$\boxed{9}$ 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & -7 \\ -1 & -5 & 5 & k \end{bmatrix}$ の行空間を $R(A)$，零空間を $N(A)$ とする．

(19) $\dim R(A) = 2$ となるための実数 k の条件を求めよ．

【答】 行基本変形により，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & -7 \\ -1 & -5 & 5 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & k-3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{bmatrix}.$$

よって，$\dim R(A) = 2$ となるための条件は $\boxed{k = 2}$．

(20) 実数 k が (19) の条件を満たすとき，$N(A)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ の形のものがとれる．解答欄の空所に適切な数値を記入せよ．

【答】 $k = 2$ のとき，上の変形を続けて A を簡約化すると

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & -7 \\ -1 & -5 & 5 & 2 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

これより $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}s + \frac{9}{2}t \\ \frac{3}{2}s - \frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \frac{s}{2} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t}{2} \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数})$$

となるので，$N(A)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} \boxed{-5} \\ \boxed{3} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{9} \\ \boxed{-1} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ がとれる．