数学演習第二・中間統一試験【問題用紙】

2023 年 11 月 29 日実施 ・ 試験時間 90 分

- 解答用紙の所定欄に結果のみを記すこと.
- 結果は整理された形で答えること (整理が不十分な場合には不正解となることがある).

1 (1) $a = \log(1+\sqrt{2}\,)$ のとき, 広義積分 $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{\cosh x}$ の値を求めよ.

2 関数 $f(x,y) = \mathrm{Sin}^{-1}\,\dfrac{y}{x}$ $(|y| < x)$ および $\varphi(t) = t^2+1$, $\psi(t) = 2t$ について考える.

(2) 偏導関数 $f_y(x,y)$ を求めよ.

(3) 2 次偏導関数 $f_{xy}(x,y)$ を求めよ.

(4) 合成関数 $g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ $(|t| < 1)$ の導関数 $g'(t)$ を求めよ.

3 関数 $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$ および $\varphi(u,v) = u^2 - v^2$, $\psi(u,v) = 2uv$ について考える.

(5) 合成関数 $g(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ の $(u,v) = (1,-2)$ における u に関する偏微分係数 $g_u(1,-2)$ を求めよ.

(6) 変換 $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

4 関数 $f(x,y) = \dfrac{\cos(x+2y)}{1-x+y}$ について考える.

(7) 点 $(0,0,1)$ における曲面 $z = f(x,y)$ の接平面の方程式を $z = ax+by+c$ (a,b,c は定数) の形で求めよ.

(8) $f(x,y)$ のマクローリン展開の 2 次の項, すなわち

$$f(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + \boxed{a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2} + \cdots$$

の枠で囲った部分を具体的に書け.

5 関数 $f(x,y) = x^2y + y^3 + 2xy + y^2$ に対する極値問題を考える.

(9) $f(x,y)$ の停留点 (すなわち $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を満たす点) をすべて求めよ.

(10) $f(x,y)$ の極値をすべて求め, 各極値 c に対して「点 (a,b) で極大値 (or 極小値) c をとる」という形で答えよ.

6 空間内で 3 点 A$(-1, 2, 0)$, B$(1, 1, 3)$, C$(0, 1, -2)$ の定める平面を α とする．また，原点 O から平面 α に下ろした垂線の足 (すなわち垂線と平面 α との交点) を D とする．

(11) 平面 α の方程式を $ax + by + cz = d$ の形で求めよ．

(12) 4 点 O, A, B, C を頂点とする四面体の体積を求めよ．

(13) 2 点 A, D を通る直線の方程式を求めよ．

7 $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ k \end{bmatrix}$ によって生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $V = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle$ について考える．

(14) $V = \mathbb{R}^4$ となるための実数 k の条件を求めよ．

(15) 実数 k が (14) の条件を満たさないとする．このとき，$\mathscr{A} = \left(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\right)$ が V の基底ならば $\boldsymbol{a}_4$ の $\mathscr{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{a}_4]_{\mathscr{A}}$ を求め，$\mathscr{A}$ が V の基底でないならば $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の非自明な１次関係式を求めよ．

8 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ と $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1 = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle, \quad W_2 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x} = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + y - 4z = 0 \right\}$$

について考える．

(16) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が１次独立ならば「１次独立」と答え，１次従属なら非自明な１次関係式を求めよ．

(17) W_2 の次元を求めよ．

(18) $W_1 \cap W_2$ の基底を求めよ．

9 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 & -7 \\ -1 & -5 & 5 & k \end{bmatrix}$ の行空間を $R(A)$, 零空間を $N(A)$ とする．

(19) $\dim R(A) = 2$ となるための実数 k の条件を求めよ．

(20) 実数 k が (19) の条件を満たすとき，$N(A)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ の形のものがとれる．解答欄の空所に適切な数値を記入せよ．