令和５年度 数学演習第二 期末統一試験　【解説】

2024 年 1 月 31 日 実施

$\boxed{1}$ (1) $D: 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq 1-y$ と考えると

$$\iint_D (2x-y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (2x-y)\,dx = \int_0^1 [x^2 - xy]_{x=0}^{x=1-y}\,dy$$
$$= \left[y - \frac{3}{2}y + \frac{2}{3}y^3\right]_0^1 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

(2) $D: 0 \leqq y \leqq \pi,\ 0 \leqq x \leqq \pi - y$ と考えると

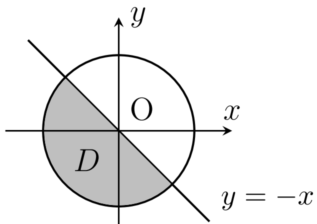
$$\iint_D y\,\sin(x-y)\,dxdy = \int_0^\pi dy \int_0^{\pi-y} y\,\sin(x-y)\,dx = \int_0^\pi [-y\,\cos(x-y)]_{x=0}^{x=\pi-y}\,dy$$
$$= \int_0^\pi \left\{ y(\sin y)' + y\left(\frac{\sin 2y}{2}\right)' \right\} dy = [\cos y]_0^\pi = -2$$

(3) $u = x-y,\ v = x+y$ とおくと，$x = \dfrac{u+v}{2},\ y = \dfrac{-u+v}{2}$ より，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{2}$ で，D は $E: 0 \leqq u \leqq 1,\ u^2 \leqq v \leqq 1$ に対応する．よって，変数変換の公式から

$$\iint_D (x-y)\,e^{x+y}\,dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 du \int_{u^2}^1 u\,e^v\,dv = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e - e^{u^2}}{2}(u^2)'\,du$$
$$= \frac{1}{4}[eu^2 - e^{u^2}]_0^1 = \frac{1}{4}$$

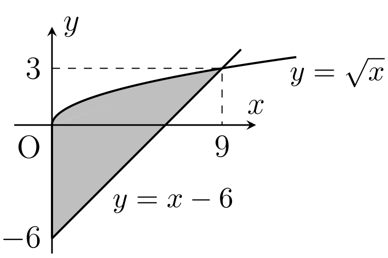
(4) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r \geqq 0)$ とおくと，$x^2+y^2 \leqq 1$ より $0 \leqq r \leqq 1$ で，$x+y \leqq 0$ は $\sin\theta \leqq -\cos\theta$ と同値なので $\dfrac{3\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{7\pi}{4}$ がわかる．よって

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \int_{3\pi/4}^{7\pi/4} d\theta \int_0^1 r\,\sqrt{1-r^2}\,dr$$
$$= \pi\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$



$\boxed{2}$ (5) $0 \leqq x \leqq 9,\ x-6 \leqq y \leqq \sqrt{x}$ より，$-6 \leqq y \leqq \sqrt{9} = 3$ で，常に $x \leqq y+6$ であるが，$y \leqq 0$ のときには $y \leqq 0 \leqq \sqrt{x}$ は充たされていて，$y \geqq 0$ のときに限って $y \leqq \sqrt{x}$ と $y^2 \leqq x$ は同値である．よって

$$\int_0^9 dx \int_{x-6}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy = \int_{-6}^0 dy \int_0^{y+6} f(x,y)\,dx + \int_0^3 dy \int_{y^2}^{y+6} f(x,y)\,dx$$



$\boxed{3}$ (6) $s+t+u = 2(x+y+z)$ より，$x+y+z = \dfrac{1}{2}(s+t+u)$ で，$x = \dfrac{1}{2}(s+t+u)-t = \dfrac{1}{2}(s-t+u)$, $y = \dfrac{1}{2}(s+t-u)$, $z = \dfrac{1}{2}(-s+t+u)$ から

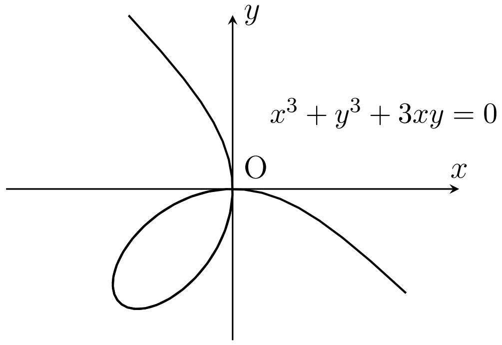
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t,u)} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-2}{8}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

なので

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 ds \int_0^1 dt \int_0^1 (s+t+u)\,du = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{8}$$

$\boxed{4}$

(7) $0 = g(x,y) = x^3+y^3+3xy$ の両辺をそれぞれ x で微分すると，$0 = 3\{(x+y^2)y' + (x^2+y)\}$ から，$\varphi'(x) = y' = -\dfrac{x^2+y}{x+y^2}$ を得る．



(8) $\varphi(x)$ が $x=a$ で極値をとれば，$\varphi'(a)=0$ なので，(7) より $\varphi(a) = -a^2$ をみたす．そのとき，$0 = g(a,\varphi(a)) = a^3(a^3+2)$ で，a は実数であるから，$a=0$ または $a = -\sqrt[3]{2}$ を得る．しかし，$\varphi(x)$ は $x=0$ で微分可能でないため，$a=0$ は除外される．$\varphi'(a)=0$ をみたすとき

$$\varphi''(a) = -\frac{g_{xx}(a,-a^2)}{g_y(a,-a^2)} = -\frac{6a}{3a(1+a^3)} = -\frac{2}{1+a^3}$$

が成り立つ．特に $\varphi''(-\sqrt[3]{2}) = 2 > 0$ から，$\varphi(x)$ は $x = -\sqrt[3]{2}$ で極小値 $-\sqrt[3]{4}$ をとる．
(9) x, y, λ に関する連立方程式

(i) $\qquad 0 = F_x(x,y,\lambda) = 1 - 3\lambda(x^2+y)$

(ii) $\qquad 0 = F_y(x,y,\lambda) = 1 - 3\lambda(x+y^2)$

(iii) $\qquad 0 = g(x,y) = x^3+y^3+3xy$

を解く．$\lambda \neq 0$ なので，(i) と (ii) より $(x-y)(x+y-1)=0$ をみたす．ここで，$x+y=1$ とすると，(iii) から，$0 = (x^2-xy+y^2)+3xy = (x+y)^2 = 1$ となって矛盾するため，$x+y \neq 1$ を得て，(iii) より，$x^2(2x+3)=0$ であるが，(i) または (ii) から，$x=y\neq 0$ なので，$x=y=-\dfrac{3}{2}$ のみである．このとき，(i) または (ii) から，$\lambda = \dfrac{4}{9}$ がわかる．
(10) (9) の結果と $g_x(-3/2,-3/2) = g_y(-3/2,-3/2) = 9/4 \neq 0$ に注意すると，ラグランジュの未定乗数法が適用される．そこで，$h(x) = x+\varphi(x)$ とおくと，$h''(x) = \varphi''(x)$ なので，$\varphi''(-3/2)$ の符号を調べればよい．ここで

$$0 = \frac{1}{3}\frac{d^2}{dx^2}g(x,\varphi(x)) = 2x + 2\varphi(\varphi')^2 + \varphi^2\varphi'' + 2\varphi' + x\varphi''$$

$$\therefore \varphi''(x) = -\frac{2x+2\varphi(\varphi')^2+2\varphi'}{x+\varphi^2}$$

を得る．特に $\varphi'(-3/2) = -1$ から，$h''(-3/2) = \varphi''(-3/2) = \dfrac{32}{3} > 0$ なので，$f(x,y)$ $(= h(x))$ は点 $(-3/2, -3/2)$ で極小値 -3 をとる．

$\boxed{5}$ (11) 行列 A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2-3b+7a \\ 0 & 0 & -1+2b-5a \end{bmatrix}$ であるから，$\dim W = \operatorname{rank} A = 2$ であるためには連立１次方程式 $7a - 3b + 2 = 0,\ -5a + 2b - 1 = 0$ をみたすことが条件である．よって，これを解いて，求める条件は「$a = 1$ かつ $b = 3$」である．もっと簡潔に $(a,b) = (1,3)$ と書いてもよい．

(12) $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim(\mathrm{Ker}\ f) + \dim(\mathrm{Im}\ f)$ より，$\dim(\mathrm{Ker}\ f) = 1$ と $\dim W = 2$ は同値であるので，A の簡約行列から，$\mathrm{Ker}\, f = N(A) = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ で，求める基底は $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

(13) $\dim(\mathrm{Im}\ f) = 3$ と $\operatorname{rank} A = 3$ は同値であるので，(11) より，$7a - 3b + 2 \neq 0$ または $-5a + 2b - 1 \neq 0$ をみたすことが条件である．よって，求める条件は「$a \neq 1$ または $b \neq 3$」である．もっと簡潔に $(a,b) \neq (1,3)$ と書いてもよい．

$\boxed{6}$ 便宜上，$A = [\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3]$, $B = [\boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2\ \ \boldsymbol{b}_3]$, $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ と表す.

(14) A の階段行列は $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -c \\ 0 & 1 & c-1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ であるから，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の１次独立性の条件として，求める条件は $c \neq 0$.

(別法) A の正則性条件として，$\det A = c \neq 0$ でもよい．

(15) $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{v}$ より $\boldsymbol{c} = A^{-1}\boldsymbol{v}$ なので，$[A\ \ \boldsymbol{v}]$ の簡約行列が $[E_3\ \ A^{-1}\boldsymbol{v}]$ であることに注意すると，$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ が得られる．よって，求める行列は $A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(16) 求める表現行列を F とすると，$f(\boldsymbol{v}) = F\boldsymbol{v}$ であるので，$f(\boldsymbol{v})$ を計算すればよい．
そこで，$\boldsymbol{v}$ の基底 $\mathcal{A}$ に関する座標を $\boldsymbol{c}$ とすると

$$\boldsymbol{c} = A^{-1}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ x+y \end{bmatrix}$$

に注意し，f は線形なので，$c = 1$ として

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}) &= (x+y+z)\, f(\boldsymbol{a}_1) + (x+z) f(\boldsymbol{a}_2) + (x+y) f(\boldsymbol{a}_3) \\ &= (x+y+z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (x+z) \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + (x+y) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

(17) 求める表現行列は $\quad A^{-1}FA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

(別法) 基底 $\mathcal{A}$ が簡単なので，$f(\boldsymbol{a}_1)$, $f(\boldsymbol{a}_2)$, $f(\boldsymbol{a}_3)$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の１次結合で表すことも容易であろう．

$$f(\boldsymbol{a}_1) = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3,\ \ f(\boldsymbol{a}_2) = 2\boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{a}_3,\ \ f(\boldsymbol{a}_3) = -3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$$

これらからも同じ表現行列は得られるが，基底を構成するベクトルの成分が小さい場合以外には期待できない方法であろう．

$\boxed{7}$ (18) M の固有多項式を因数分解すればよく

$$\begin{aligned}\det(\lambda E_3 - M) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 4-2\lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2\end{aligned}$$

(19) $E_3 - M$ の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから，V_1 の基底の１つは $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

(20) $2E_3 - M$ の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから，V_2 の基底の１つは $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ で，

(19) の結果と合わせて，$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと，P は正則で，$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

をみたす．このとき，$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ を用いると

$$Q = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (P^{-1}MP)^n = P^{-1}M^nP$$

$$M^n = PQP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2^n+1 & 2^{n+1}-2 \\ 2^{n+1}-2 & 3\cdot 2^n - 2 & -2^{n+2}+4 \\ 2^n-1 & 2^n-1 & -2^n+2 \end{bmatrix} \quad \therefore N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$