令和５年度 数学演習第二 期末統一試験【問題用紙】

2024 年 1 月 31 日実施・試験時間 90 分

— 解答用紙には答えのみを整理された形で記入すること —

1 次の 2 重積分の値を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (2x-y)\,dxdy,\qquad D:\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1.$

(2) $\displaystyle\iint_D y\,\sin(x-y)\,dxdy,\qquad D:\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq \pi.$

(3) $\displaystyle\iint_D (x-y)\,e^{x+y}\,dxdy,\qquad D:\ y \leqq x,\ (x-y)^2 \leqq x+y \leqq 1.$

(4) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy,\qquad D:\ x^2+y^2 \leqq 1,\ x+y \leqq 0.$

2 (5) 連続関数 $f(x,y)$ に対して，等式

$$\int_0^9 dx \int_{x-6}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy = \int_{-6}^{\boxed{\text{ア}}} dy \int_{\boxed{\text{イ}}}^{\boxed{\text{エ}}} f(x,y)\,dx + \int_{\boxed{\text{ア}}}^{3} dy \int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\boxed{\text{エ}}} f(x,y)\,dx$$

が成り立つ．このとき，**ア** から **エ** に入るべき適切な数値または数式を答えよ.

3 (6) 3 重積分

$$I = \iiint_V (x+y+z)\,dxdydz,\ V:\ 0 \leqq x+y \leqq 1,\ 0 \leqq y+z \leqq 1,\ 0 \leqq z+x \leqq 1$$

を考える．V は変数変換 $s=x+y,\ t=y+z,\ u=z+x$ により，

$$W:\ 0 \leqq s \leqq 1\,, 0 \leqq t \leqq 1\,, 0 \leqq u \leqq 1$$

に対応する．ここで，$x+y+z$ を s,t,u の式で表すと，$x+y+z = \boxed{\quad\text{カ}\quad}$ と書けて，ヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(s,t,u)} = \boxed{\quad\text{キ}\quad}$ から，I の値を計算すると，$I = \boxed{\quad\text{ク}\quad}$ となる．このとき，**カ** から **ク** に入るべき適切な数値または数式を答えよ.

4 2 変数関数 $g(x,y) = x^3+y^3+3xy$ について考える．$g(x,y)=0$ で定義される陰関数を $y=\varphi(x)$ として，以下の設問に答えよ.

(7) $\varphi'(x)$ を $x,\,y$ の有理式で表せ.

(8) $\varphi(x)$ の極値をすべて求め，解答欄には「$x=a$ で極大値（または極小値）b をとる」という形式で答えを記せ.

(9) $f(x,y)=x+y,\ F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\,g(x,y)$ とおくとき，連立方程式 $F_x(x,y,\lambda)=0,\ \ F_y(x,y,\lambda)=0,\ \ g(x,y)=0$ の解 (x,y,λ) をすべて求めよ.

(10) 条件 $g(x,y)=0$ の下で，関数 $f(x,y)=x+y$ の極値をすべて求め，解答欄には「点 (c,d) で極大値（または極小値）m をとる」という形式で答えを記せ.

5 a, b を実数の定数とする． $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ とし，$W = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$, $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]$ と定める．また，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to W$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ によって定義するとき，以下の設問に答えよ．

(11) $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W の次元が $\dim W = 2$ であるための a, b の条件を求めよ．

(12) f の核 $\operatorname{Ker} f$ の次元が $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$ であるとき，$\operatorname{Ker} f$ の基底を 1 つ求めよ．ただし，基底をなすベクトルはすべての成分が整数となるように選ぶこと．

(13) f の像 $\operatorname{Im} f$ の次元が $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$ であるための a, b の条件を求めよ．

6 c を実数とし，$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする．そして，

$$f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

によって線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を定めるとき，以下の設問に答えよ．

(14) $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ が $\mathbb{R}^3$ の基底になるための c の条件を求めよ．

(15) $c = 1$ とする．基底 $\mathcal{A}$ から基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ への基底変換行列を求めよ．

(16) $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f の表現行列を求めよ．

(17) $c = 1$ とする．f の基底 $\mathcal{A}$ に関する表現行列を求めよ．

7 3 次正方行列 $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ に対して，以下の設問に答えよ．

(18) M の固有値をすべて求めよ．

(19) M の最小の固有値に対する固有空間の基底を 1 つ求めよ．ただし，基底をなすベクトルはすべての成分が整数となるように選ぶこと．

(20) 行列 $N = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} M^n$ を求めよ．ただし，N は「M の n 乗 M^n の (i, j) 成分を $m_{ij}(n)$ と書いたとき $\lim_{n\to\infty} 2^{-n} m_{ij}(n)$ を (i, j) 成分とする 3 次正方行列」を表す．