数学演習第一（演習第 1 回）
微積：極限値, 逆三角関数

2024 年 5 月 1 日

要点

基本的な極限値

- 三角関数: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
- 指数・対数関数: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1\quad\left(\Leftrightarrow\ e:=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

逆三角関数

- $y=\mathrm{Sin}^{-1}\,x\ \Leftrightarrow\ x=\sin y\quad\left(-1\le x\le 1,\,-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right)$
- $y=\mathrm{Cos}^{-1}\,x\ \Leftrightarrow\ x=\cos y\quad(-1\le x\le 1,\,0\le y\le\pi)$
- $y=\mathrm{Tan}^{-1}\,x\ \Leftrightarrow\ x=\tan y\quad\left(x\in\mathbb{R},\,-\dfrac{\pi}{2}< y<\dfrac{\pi}{2}\right)$

1 次の極限値を求めよ．(演習書 **問題 2.2.1** (2), (6), (7), (8), (11), (12), (13), (14))

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax-\sin bx}{x}\quad(ab\neq 0)$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1}{x-\frac{\pi}{3}}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\tan x}$　　(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)}{\tan x}$　　(11) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$　　(13) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$　　(14) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)}$

- (12), (13) については, まず対数をとった関数の極限値を求めよ．

2 次の値を求めよ．(演習書 **問題 2.3.1** [改題])

(5) $\sin(\mathrm{Tan}^{-1}(-2))$　　(6) $\tan\left(\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\dfrac{1}{5}\right)\right)$

3 次の方程式を解け．(演習書 **問題 2.3.3** [一部改題])

(1) $\mathrm{Cos}^{-1}\,x=\mathrm{Tan}^{-1}\,3$　　(2) $\mathrm{Sin}^{-1}\,x+2\,\mathrm{Sin}^{-1}\,\dfrac{3}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

(3) $\mathrm{Tan}^{-1}\,x+2\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\dfrac{2}{5}=\dfrac{\pi}{4}$

4 次の関係式を示せ．(演習書 **問題 2.3.4** [改題])

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\,x+\mathrm{Cos}^{-1}\,x=\dfrac{\pi}{2}$　　(2) $\mathrm{Tan}^{-1}\,x+\mathrm{Tan}^{-1}\,\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}\quad(x>0)$

※ **2**, **3** のような問題では, 数値として確定している部分を α などとおいてみるのがよい．

例えば, **3** (1) では, $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}\,3$ とおくと, α は $-\pi/2<\alpha<\pi/2$ かつ $\tan\alpha=3$ をみたし, 問題の方程式は $\mathrm{Cos}^{-1}\,x=\alpha$ と表される．よって, 方程式の解 x は, 上の条件をみたす α に対する, $\cos\alpha$ の値として与えられる．

$\boxed{\textbf{5}}$ 双曲線関数

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を示せ.
但し, $\cosh^2 x = (\cosh x)^2$, $\sinh^2 x = (\sinh x)^2$ (三角関数と同様な記法).

(2) $y = \sinh x$ および $y = \tanh x$ の逆関数をそれぞれ求めよ.

(3) $y = \cosh x$ $(x \geq 0)$ および $y = \cosh x$ $(x \leq 0)$ の逆関数をそれぞれ求めよ.

$\boxed{\textbf{6}}$ $\boxed{\text{レポート課題}}$

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sin(x + \pi/6)}{(\pi/3 - x)\cos(x + \pi/6)}$ を求めよ.

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1 + \tan 3x)^{1/2x}$ を求めよ.

$\boxed{\textbf{7}}$ $\boxed{\text{レポート課題}}$

以下の問いに答えよ.

(3) $\sin\left(2 \operatorname{Tan}^{-1} \dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ.

(4) 方程式 $\operatorname{Sin}^{-1} x + 2 \operatorname{Sin}^{-1} \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{2}$ が解をもつことを示し, x を求めよ.