数学演習第一（演習第 1 回）【解答例】

微積：極限値, 逆三角関数 (2024 年 5 月 1 日実施)

1 演習問題

1 (2) $\dfrac{\sin ax-\sin bx}{x}=\dfrac{\sin ax}{x}-\dfrac{\sin bx}{x}=\dfrac{\sin ax}{ax}\cdot a-\dfrac{\sin bx}{bx}\cdot b\to\boxed{a-b}\ (x\to 0)$

(6) $y=x-\dfrac{\pi}{3}$ とおくと, $x\to\dfrac{\pi}{3}$ のとき $y\to 0$. このとき, $\dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{6})-1}{x-\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\sin(y+\frac{\pi}{2})-1}{y}=\dfrac{\cos y-1}{y}=$ $-\dfrac{(1-\cos y)(1+\cos y)}{y(1+\cos y)}=\dfrac{-\sin^2 y}{y(1+\cos y)}=\left(\dfrac{\sin y}{y}\right)^2\dfrac{-y}{1+\cos y}\to 1\cdot 0=\boxed{0}\ (x\to 0)$.

(7) $\dfrac{1-\cos x}{x\tan x}=\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x}\dfrac{\cos x}{1+\cos x}=\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{\cos x}{1+\cos x}\to\boxed{\dfrac{1}{2}}\ (x\to 0)$.

【注】 (6), (7) の解答例では, $1-\cos x$ を $1-\cos x=\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}=\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ と変形したが, 半角の公式を用いて $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$ と変形する方法もよく用いられる. この変形から容易に得られる極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ は基本的.

(8) $x\to 0$ のとき, $\sin x\to 0$ であるから, $\dfrac{\tan(\sin x)}{\tan x}=\dfrac{\sin(\sin x)}{\cos(\sin x)}\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}\dfrac{\cos x}{\cos(\sin x)}\to\boxed{1}\ (x\to 0)$.

【別法】 $\dfrac{\tan x}{x}=\dfrac{\sin x}{x}\cdot\cos x\to 1$ を用いて, $\dfrac{\tan(\sin x)}{\tan x}=\dfrac{\tan(\sin x)}{\sin x}\dfrac{x}{\tan x}\dfrac{\sin x}{x}\to 1$.

(11) $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおくと, $x\to\dfrac{\pi}{2}-0$ のとき $y\to +0$. このとき, $\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x=y\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)=\dfrac{y}{\tan y}=$ $\dfrac{y}{\sin y}\cdot\cos y\to\boxed{1}$.

(12) 自然対数をとって考える. $y=1-x$ $(x=1-y)$ とおくと, $x\to 1$ のとき $y\to 0$ であり, $\log x^{\frac{1}{1-x}}=\dfrac{\log x}{1-x}=$ $\dfrac{\log(1-y)}{y}\to -1$. よって, $x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\log x^{\frac{1}{1-x}}}\to\boxed{e^{-1}}\left(=\dfrac{1}{e}\right)$.

(13) 自然対数をとって考える. $\cos x=1+(\cos x-1)$ と分解し, (7) と同様な計算を用いて ((7) の【注】も参照), $\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\log(\cos x)}{x^2}=\dfrac{\log(1+\cos x-1)}{x^2}=\dfrac{\log(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\dfrac{\cos x-1}{x^2}\to 1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$ $(x\to 0)$. よって, $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}\to\boxed{e^{-1/2}}\left(=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

(14) $x\to +0$ のとき, $\sin x\to +0$, $\log(\sin x)\to -\infty$ より, $\dfrac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)}=\dfrac{\log(\sin 2x)-\log(\cos 2x)}{\log(\sin x)-\log(\cos x)}=$ $\dfrac{\log(\sin x)+\log(2\cos x)-\log(\cos 2x)}{\log(\sin x)-\log(\cos x)}=\dfrac{1+\frac{\log(2\cos x)-\log(\cos 2x)}{\log(\sin x)}}{1-\frac{\log(\cos x)}{\log(\sin x)}}\to\boxed{1}$

2 (5) $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}(-2)$ とおいて, $\sin\alpha$ の値を求める. $\tan\alpha=-2$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから, $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=$ $1+\tan^2\alpha=5$. これより, $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ なので, $\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\boxed{-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$.

(6) $\alpha=\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\dfrac{1}{5}\right)$ とおいて, $\tan\alpha$ の値を求める. $\cos\alpha=-\dfrac{1}{5}$ $(0\le\alpha\le\pi)$ であるから, $\sin^2\alpha=$ $1-\cos^2\alpha=\dfrac{24}{25}$ となり, $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. よって, $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{2\sqrt{6}/5}{-1/5}=\boxed{-2\sqrt{6}}$.

3 (1) $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}3$ とおくと, $\tan\alpha=3>0$ かつ $\mathrm{Cos}^{-1}x=\alpha$. このとき, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから, $\mathrm{Cos}^{-1}x=\alpha$ は解をもち, $x=\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$ で与えられる.

(2) $\alpha=\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{3}{4}$ とおくと, $\sin\alpha=\dfrac{3}{4}>0$ かつ $\mathrm{Sin}^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}-2\alpha$. このとき, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから, $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}-2\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. よって, $\mathrm{Sin}^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}-2\alpha$ は解をもち, $x=\sin\Bigl(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\Bigr)=\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\boxed{-\dfrac{1}{8}}$ で与えられる.

(3) $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{2}{5}$ とおくと, $\tan\alpha=\dfrac{2}{5}\in(0,1)$ かつ $\mathrm{Tan}^{-1}x=\dfrac{\pi}{4}-2\alpha$. このとき, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ であるから, $-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}-2\alpha<\dfrac{\pi}{4}$. よって, $\mathrm{Tan}^{-1}x=\dfrac{\pi}{4}-2\alpha$ は解をもち, $x=\tan\Bigl(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\Bigr)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan 2\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan 2\alpha}=\dfrac{1-\tan 2\alpha}{1+\tan 2\alpha}$ で与えられる. ここで, $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{20}{21}$ であるから, $x=\dfrac{1-\frac{20}{21}}{1+\frac{20}{21}}=\boxed{\dfrac{1}{41}}$ となる.

【注】この種の方程式は解をもたないことがある. 例えば,

- $\mathrm{Cos}^{-1}x=\mathrm{Tan}^{-1}(-2)$ は **3** (1) と似ているが, 解をもたない. 実際, $\mathrm{Tan}^{-1}(-2)\in\Bigl(-\frac{\pi}{2},0\Bigr)$ は関数 $\mathrm{Cos}^{-1}x$ の値域 $[0,\pi]$ に含まれない.
- レポート課題の 問題 4 に似た問題 $\mathrm{Sin}^{-1}x+2\,\mathrm{Cos}^{-1}(-3/4)=\pi$ も解をもたない. なぜか？

4 (1) $\theta=\mathrm{Sin}^{-1}x$ とおくと, $\sin\theta=x$ $\Bigl(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\Bigr)$. このとき $x=\sin\theta=\cos\Bigl(\dfrac{\pi}{2}-\theta\Bigr)$ かつ $0\le\dfrac{\pi}{2}-\theta\le\pi$ であるから, Cos^{-1} の定義により $\dfrac{\pi}{2}-\theta=\mathrm{Cos}^{-1}x$. よって, $\mathrm{Sin}^{-1}x+\mathrm{Cos}^{-1}x=\theta+\Bigl(\dfrac{\pi}{2}-\theta\Bigr)=\dfrac{\pi}{2}$.

(2) $\theta=\mathrm{Tan}^{-1}x$ とおくと, $\tan\theta=x$ $\Bigl(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\Bigr)$. ここで, $x>0$ より $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$. このとき,

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}=\tan\Bigl(\frac{\pi}{2}-\theta\Bigr)$$

かつ $0<\dfrac{\pi}{2}-\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから, Tan^{-1} の定義により $\dfrac{\pi}{2}-\theta=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{x}$. よって, $\mathrm{Tan}^{-1}x+\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{x}=\theta+\Bigl(\dfrac{\pi}{2}-\theta\Bigr)=\dfrac{\pi}{2}$.

【注】 $x<0$ のときには, $\mathrm{Tan}^{-1}x+\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ.

5 (1) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=(\cosh x+\sinh x)(\cosh x-\sinh x)=e^x\cdot e^{-x}=1$.

(2) $X=e^x>0$ とおけば,

- $y=\sinh x=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\dfrac{1}{2}\Bigl(X-\dfrac{1}{X}\Bigr)$ より, $X^2-2yX-1=0$. これを X に関する 2 次方程式とみなして, $X>0$ なる解は $X=e^x=y+\sqrt{y^2+1}$. よって, $y=\sinh x$ の逆関数は $\boxed{x=\log(y+\sqrt{y^2+1}\,)}$.
- $y=\tanh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{X-X^{-1}}{X+X^{-1}}=\dfrac{X^2-1}{X^2+1}$ より $X^2=e^{2x}=\dfrac{1+y}{1-y}$ (>0). この X に関する 2 次方程式の $X>0$ なる解は $X=\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$. よって, $y=\tanh x$ の逆関数は $\boxed{x=\log\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}}$ $\Biggl($あるいは $\boxed{x=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}}\Biggr)$.

(3) $X=e^x>0$ とおけば, $y=\cosh x=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\dfrac{1}{2}\Bigl(X+\dfrac{1}{X}\Bigr)\ge 1$ となり, $X^2-2yX+1=0$. このとき, $y\ge 1$ であるから, この X に関する 2 次方程式は実数解 $X=y\pm\sqrt{y^2-1}$ をもつ.

- $x\ge 0$ ならば, $X=e^x\ge 1$ より, $X=y+\sqrt{y^2-1}$. よって, $y=\cosh x$ $(x\ge 0)$ の逆関数は $\boxed{x=\log(y+\sqrt{y^2-1}\,)}$.

- $x \leq 0$ ならば, $X = e^x \in (0, 1]$ より, $X = y - \sqrt{y^2 - 1} = \dfrac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}}$. よって, $y = \cosh x$ $(x \leq 0)$ の逆関数は $\boxed{x = -\log(y + \sqrt{y^2 - 1})}$ $\left(\text{あるいは } \boxed{x = \log(y - \sqrt{y^2 - 1})}\right)$.

2 レポート課題

6 (1) $y = \dfrac{\pi}{3} - x$ とおくと, $x \to \dfrac{\pi}{3}$ のとき $y \to 0$. このとき, $\sin(x + \pi/6) = \cos y$, $\cos(x + \pi/6) = \sin y$ より

$$\frac{1 - \sin(x + \pi/6)}{(\pi/3 - x)\cos(x + \pi/6)} = \frac{1 - \cos y}{y \sin y} = \frac{1 - \cos^2 y}{y \sin y}\frac{1}{1 + \cos y} = \frac{\sin y}{y}\frac{1}{1 + \cos y} \to \boxed{\frac{1}{2}} \ (y \to 0) \ .$$

(2) 自然対数をとって考える. $\log(1 + \tan 3x)^{\frac{1}{2x}} = \dfrac{\log(1 + \tan 3x)}{2x} = \dfrac{\log(1 + \tan 3x)}{\tan 3x}\dfrac{\tan 3x}{3x} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right) \to \dfrac{3}{2}$ $(x \to 0)$. よって, $(1 + \tan 3x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\log(1+\tan 3x)^{\frac{1}{2x}}} \to \boxed{e^{3/2}}$ $(x \to 0)$.

7 (3) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2}$ とおくと, $\tan \alpha = \dfrac{1}{2}$. このとき, $\dfrac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = \dfrac{5}{4}$ より, $\cos \alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ となる, また, $\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ なので, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \boxed{\dfrac{4}{5}}$.

(4) $\alpha = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{3}$ とおくと, $\sin \alpha = \dfrac{1}{3}$ で, $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$. このとき, $0 < \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ なので, $\mathrm{Sin}^{-1} x = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$ は解をもち, $x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \boxed{\dfrac{7}{9}}$.