

数学演習第一（演習第3回）

微積：合成関数の微分法, 逆関数の微分法等

2024 年 5 月 15 日

要点

合成関数の微分 (教科書 p.28 定理 2.1.4)

関数 $y = f(x)$ が x の区間 I で微分可能, $z = g(y)$ が y の区間 J で微分可能とする. $f(I) \subset J$ ならば, 合成関数 $z = g(f(x))$ は x の関数として区間 I で微分可能で,

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x) \quad \text{あるいは} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

逆関数の微分 (教科書 p.29 定理 2.1.5)

関数 $y = f(x)$ は区間 I で微分可能で単調な関数とする. $f'(x) \neq 0$ ($x \in I$) ならば, 逆関数 $x = f^{-1}(y)$ は $J = f(I)$ で微分可能で,

$$\{f^{-1}(y)\}' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \text{あるいは} \quad \frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}.$$

双曲線関数の微分 (教科書 p.19, p.31 あるいは 演習第1回 (5/1) の演習問題 5)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

と定める. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ が成り立ち, 導関数が

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

で与えられる.

1 次の x の関数の導関数を求めよ. (a は $0 < a \neq 1$ なる定数)

$$(1) \ f(x) = a^{x^2+2x} \quad [3.1.6 (5)] \quad (2) \ f(x) = \log(\log(\log x)) \quad (3) \ f(x) = x^{x^x}$$

$$(4) \ f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x}} \quad [3.1.2 (3)] \quad (5) \ f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{(x-1)^3}} \quad [3.1.2(6)]$$

$$(6) \ f(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{a^2-x^2}} \quad [3.1.2(8)] \quad (7) \ f(x) = (\sin x)^{\cos x} \quad [3.1.5(2)]$$

2 関数 f の逆関数 f^{-1} が存在し, とともに微分可能であるとする (成立条件については微積教科書 p.29 参照). このとき, $y = f^{-1}(x)$ とおけば, $x = f(y)$ ($= f(f^{-1}(x))$) であるから, 両辺を x で微分して $1 = f'(y)\{f^{-1}(x)\}'$ (合成関数の微分). よって, $y = f^{-1}(x)$ の導関数が

$$\{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \left(\text{あるいは} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \right)$$

で与えられる. この考え方 (公式) により, 次の逆三角関数の導関数を計算せよ.

$$(1) \ \sin^{-1} x \quad (2) \ \cos^{-1} x \quad (3) \ \tan^{-1} x$$

3 次の関数の導関数を求めよ.

$$\begin{array}{ll} (1) f(x) = \sin^{-1}(x^2) & [3.1.4 (3)] \\ (2) f(x) = \sin^{-1} \sqrt{1-x} & [3.1.4 (4) \text{ 改}] \\ (3) f(x) = \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} & [3.1.4 (1)] \\ (4) f(x) = \cos^{-1}(\sin x) \\ (5) f(x) = \tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x) & (6) f(x) = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$$

4 2 の逆関数の微分法を参考に、次の双曲線関数の逆関数の導関数を求めよ.

$$\begin{array}{ll} (1) y = \sinh x \left(= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) & (2) y = \cosh x \left(= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \quad (x \geq 0) \\ (3) y = \tanh x \left(= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) \end{array}$$

《注》 これら逆関数は $\sinh^{-1} x$, $\cosh^{-1} x$, $\tanh^{-1} x$ の代わりに $\text{Sinh}^{-1} x$, $\text{Cosh}^{-1} x$, $\text{Tanh}^{-1} x$ という記号を用いることもある (微積教科書 p.31 の 3). 詳しくは解答の 《注》 を参照.

5 次の x の関数の導関数を求めよ.

$$\begin{array}{ll} (1) f(x) = \tan^{-1}(\sinh x) & (2) f(x) = \sinh^{-1}(\tan x) \\ (3) f(x) = \sinh^{-1} \sqrt{x - \frac{1}{2}} & (4) f(x) = \tan^{-1}(\tanh x) \end{array}$$

レポート課題 次の x の関数の導関数を求めよ.

$$\begin{array}{ll} (1) f(x) = \log \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} & (2) f(x) = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ (3) f(x) = \sin^{-1}(\tanh x) & (4) f(x) = \tanh^{-1}(\sin x) \end{array}$$

関数の定義域に関する注意 (定義域が $\mathbb{R}$ の部分集合の場合)

- 特に指定のない限り、定義域は許される最も広い範囲で考える. 定義域の内部で微分可能でもしばしば端点で微分可能性が失われる. 例えば、 $\sin^{-1} x$ は $-1 \leq x \leq 1$ で定義され、 $-1 < x < 1$ で微分可能.
- $f(x), p(x)$ が連続関数で、 $p(x)$ が ‘有理数の値をとる定数関数’ 以外のとき、関数 $f(x)^{p(x)}$ は、通常、底 $f(x) > 0$ の範囲で考え、 $f(x)^{p(x)} = e^{p(x) \log f(x)}$ となる ($p(x)$ が正値なら極限をとって $f(x) \geq 0$ の範囲で考えることもできる). 例えば、 $(\sin x)^{\cos x}$ の定義域は $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (2n\pi, (2n+1)\pi)$ となる ($\cos 2n\pi = 1 > 0$ であるから、定義域を $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n\pi, (2n+1)\pi)$ と考えてもよい).
- $f(x)^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{f(x)})^m = \sqrt[n]{f(x)^m}$ ($m, n \in \mathbb{N}$ は互いに素) の定義域は、 n が奇数のとき $f(x)$ の定義域と一致し、 n が偶数のとき $f(x) \geq 0$ の範囲となる. ($f(x)^{-\frac{m}{n}}$ の場合は、更に $f(x) \neq 0$ が制限として加わる.)