数学演習第一（演習第３回）【解答例】

微積：合成関数の微分法, 逆関数の微分法等（2024 年 5 月 15 日実施)

1 (1) 合成関数の微分法により,

$$f'(x) = a^{x^2+2x}\log a \cdot (x^2+2x)' = \boxed{2(x+1)a^{x^2+2x}\log a}.$$

(2) $f(x)$ の定義域は $x > e$ である. 合成関数の微分法により,

$$f'(x) = \frac{(\log(\log x))'}{\log(\log x)} = \frac{1}{\log(\log x)} \cdot \frac{(\log x)'}{\log x} = \boxed{\frac{1}{x(\log x)\log(\log x)}}.$$

(3) まず, $g(x) = x^x$ とおけば, $\log g(x) = x\log x$ より,

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1, \quad g'(x) = x^x(\log x + 1).$$

(あるいは, $g'(x) = (e^{x\log x})' = e^{x\log x} \cdot (x\log x)' = x^x(\log x+1)$ と計算することもできる.) よって, $f(x) = x^{g(x)}$, $\log f(x) = g(x)\log x$ より,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x)\log x + \frac{g(x)}{x} = x^x\left((\log x+1)\log x + \frac{1}{x}\right), \quad f'(x) = \boxed{x^{x^x+x}\left((\log x+1)\log x + \frac{1}{x}\right)}.$$

(4) $(\sqrt{x}\,)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ と合成関数の微分法により,

$$f'(x) = \frac{(x+2\sqrt{x}\,)'}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}} = \boxed{\frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+2\sqrt{x}}}}.$$

(5) $\log|f(x)| = \dfrac{1}{3}\log(x^2+1) - \log|x-1|$ の両辺を x で微分すると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{3(x^2+1)} - \frac{1}{x-1} = \frac{-(x^2+2x+3)}{3(x-1)(x^2+1)}.$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x-1} \cdot \frac{-(x^2+2x+3)}{3(x-1)(x^2+1)} = \boxed{-\frac{x^2+2x+3}{3(x-1)^2(x^2+1)^{2/3}}}.$$

(6) まず, $f(x)$ の分子・分母に $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}$ をそれぞれ掛けて,

$$f(x) = \frac{(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}\,)^2}{(a^2+x^2)-(a^2-x^2)} = \frac{a^2}{x^2} + \frac{\sqrt{a^4-x^4}}{x^2}.$$

これを x で微分すると,

$$f'(x) = -\frac{2a^2}{x^3} - \frac{2x}{\sqrt{a^4-x^4}} - \frac{2\sqrt{a^4-x^4}}{x^3} = \boxed{-\frac{2a^2}{x^3}\left(1+\frac{a^2}{\sqrt{a^4-x^4}}\right)}.$$

(7) $\log f(x) = (\cos x)\log(\sin x)$ より, $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (-\sin x)\cdot\log(\sin x) + \cos x \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x}$. よって,

$$f'(x) = f(x)(\log f(x))' = \boxed{(\sin x)^{\cos x}\left\{-(\sin x)\log(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right\}}.$$

2 (1) $y = \mathrm{Sin}^{-1}\,x$ とおけば, $x = \sin y\ \left(-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$, $\dfrac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-x^2}$ より, $\dfrac{dy}{dx} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

(2) $y = \mathrm{Cos}^{-1}\,x$ とおけば, $x = \cos y\ (0 \le y \le \pi)$, $\dfrac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-x^2}$ より, $\dfrac{dy}{dx} = \boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

(3) $y = \mathrm{Tan}^{-1}\,x$ とおけば, $x = \tan y\ \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y} = 1+x^2$ より, $\dfrac{dy}{dx} = \boxed{\dfrac{1}{1+x^2}}$.

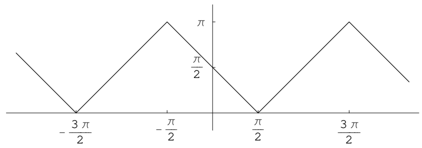
3 (1) $f'(x) = \dfrac{(x^2)'}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \boxed{\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}$.

(2) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x)}} \cdot \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \boxed{-\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}}$.

(3) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2) - \mathrm{Tan}^{-1}x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \boxed{\dfrac{1-2x\ \mathrm{Tan}^{-1}x}{(1+x^2)^2}}$.

(4) $f'(x) = -\dfrac{(\sin x)'}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \boxed{-\dfrac{\cos x}{|\cos x|}} = \boxed{\begin{cases}-1 & (\cos x > 0)\\ 1 & (\cos x < 0)\end{cases}}$.

《注》 上の事実と $\mathrm{Cos}^{-1}(\sin n\pi) = \mathrm{Cos}^{-1}0 = \dfrac{\pi}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$ より, $y = \mathrm{Cos}^{-1}(\sin x)$ ($\mathbb{R}$ 上で連続) のグラフは右の通り.



(5) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1/x^2}{1+(1/x)^2} = \boxed{0}$. ($f(x)$ は $x \neq 0$ で定義され, 微分可能.)

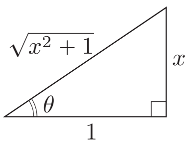
《注》 $\mathrm{Tan}^{-1}(\pm 1) = \pm\dfrac{\pi}{4}$ であるから上と合わせて, $f(x) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ $(x \gtrless 0)$ (複号同順).

(6) $f'(x) = \left(\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \dfrac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - x\cdot\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = \boxed{\dfrac{1}{x^2+1}}$.

《注》結果を不思議に思うかもしれないが, $\boxed{\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{Tan}^{-1}x}$ が成り立つので当然である. この関係式は次のように示される: $\theta = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ とおけば, $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \in (-1,1)$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = x$ となるから, θ の表現として枠内の関係式が得られる. 実は, 更に

$$\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{Tan}^{-1}x = \pm\,\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (\pm x \geq 0)$$

が成り立つ (複号同順). この式は $x \geq 0$ の場合は上の計算から直ちに従う (右図を見れば一目瞭然). $x \leq 0$ の場合は x を $-x$ で置き換え, $\mathrm{Sin}^{-1}, \mathrm{Tan}^{-1}$ が奇関数であることに注意すればよい.



4 双曲線関数 $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ については微積教科書 p.19 参照. 特に, 次の性質は重要 (三角関数の場合と比較せよ):

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

これらの性質は定義を用いて容易に確認できる (see **要点**).

(1) まず, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\sinh x = \pm\infty$ (複号同順) と中間値の定理により, $y = \sinh x$ の値域は $\mathbb{R}$ 全体. また, $\dfrac{dy}{dx} = \cosh x = \sqrt{1+\sinh^2 x} = \sqrt{1+y^2}$ である. $\dfrac{dy}{dx} > 0$ と $y = \sinh x$ の全射性により, $y = \sinh x$ の逆関数は $\mathbb{R}$ 全体で定義される. その導関数は $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. 従って, $\boxed{(\sinh^{-1}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$.

【別解】 $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$ により $x = \log(y + \sqrt{1+y^2})$ と具体的な形を求めることができる. よって, その導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

(2) $y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ は, 偶関数で, $x \geq 0$ において $y \geq 1$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cosh x = \infty$ の単調増加関数である. また, $\dfrac{dy}{dx} = \sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \sqrt{y^2-1}$ である. $\dfrac{dy}{dx} > 0$ により, $y = \cosh x$ $(x \geq 0)$ の逆関数は $y \geq 1$ で定義される. その導関数は $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$. 従って, $\boxed{(\cosh^{-1}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$ $(x > 1)$.

【別解】 $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$ $(x \geq 0)$ により $x = \log(y + \sqrt{y^2-1})$ と具体的な形を求めることができる. よっ

て, その導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

(3) まず, $\tanh x = 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$ より, $y = \tanh x$ の値域は $-1 < y < 1$ である. また, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = 1 - y^2$ である. これにより $\dfrac{dy}{dx} > 0$ であることがわかり, $y = \tanh x$ の逆関数は $-1 < y < 1$ で定義される. その導関数は $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{1-y^2}$. 従って, $\boxed{(\tanh^{-1} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}}$.

【別解】 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \Leftrightarrow e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$ に注意する. $e^{2x} > 0$ なので, この等式を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するための条件は $-1 < y < 1$ であり, このとき $x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}\left(= \log\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}\right)$ を得る. よって, その導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\{\log(1+y) - \log(1-y)\} = \frac{1}{1-y^2} \quad (-1 < y < 1).$$

《注》 $\sinh x$, $\tanh x$ はともに $\mathbb{R}$ 上で単調増加であるから, (実数値関数を考える限りは) 逆関数 $\sinh^{-1} x$, $\tanh^{-1} x$ の表記に曖昧さはない. 一方, $\cosh x$ では定義域を $x \geq 0$, $x \leq 0$ に制限して得られる 2 通りの逆関数が考えられ, 通常は $\cosh x$ $(x \geq 0)$ の逆関数に対して $\cosh^{-1} x$ を割り当てる. 曖昧さをなくすために, $\sinh^{-1} x$, $\cosh^{-1} x$, $\tanh^{-1} x$ の代わりに $\mathrm{Sinh}^{-1} x$, $\mathrm{Cosh}^{-1} x$, $\mathrm{Tanh}^{-1} x$ という記号を用いることもある (微積教科書 p.31 の 3 を参照):

$$\mathrm{Sinh}^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}), \quad \mathrm{Cosh}^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}), \quad \mathrm{Tanh}^{-1} x = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

実は, 複素数値関数としては $\sinh x$, $\tanh x$ でも x の範囲を制限しないと逆関数が一意に定まらない (詳細は省略) ので, 複素数値の場合も考慮して, 上の形の "標準的な" 逆関数を $\mathrm{Sinh}^{-1} x$, $\mathrm{Cosh}^{-1} x$, $\mathrm{Tanh}^{-1} x$ と表そうという訳である.

5 (1) $f'(x) = \{\mathrm{Tan}^{-1}(\sinh x)\}' = \dfrac{(\sinh x)'}{1+\sinh^2 x} = \dfrac{\cosh x}{\cosh^2 x} = \boxed{\dfrac{1}{\cosh x}}$.

(2) $(\sinh^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ を用いて, $f'(x) = \{\sinh^{-1}(\tan x)\}' = \dfrac{(\tan x)'}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$.

ここで, $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ より,

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \sqrt{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot |\cos x| = \boxed{\dfrac{1}{|\cos x|}}$.

(3) $\left(\sinh^{-1}\sqrt{x - \dfrac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x - \frac{1}{2}}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{x - \frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - \dfrac{1}{4}}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{4x^2-1}}}$.

(4) $(\tanh x)' = \left(\dfrac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$ を用いて,

$f'(x) = \{\tan^{-1}(\tanh x)\}' = \dfrac{(\tanh x)'}{1+\tanh^2 x} = \dfrac{1-\tanh^2 x}{1+\tanh^2 x} = \dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x + \sinh^2 x}$

ここで, $\cosh^2 x = \dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}$, $\sinh^2 x = \dfrac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}$ より,

$f'(x) = \dfrac{2}{e^{2x}+e^{-2x}} = \boxed{\dfrac{1}{\cosh 2x}}$.

レポート課題

(1) $f(x)=\log\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\dfrac{1}{2}\bigl\{\log(1-\sin x)-\log(1+\sin x)\bigr\}$ だから， x で微分すれば，

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos x}{1-\sin x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)=-\frac{\cos x}{2}\cdot\frac{2}{1-\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\boxed{-\frac{1}{\cos x}}.$$

(2) $(\mathrm{Cos}^{-1}x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を用いて，

$$f'(x)=\left(\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=-\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}}=-\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}}{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}}=\frac{x}{|x|}\cdot\frac{1}{x^2+1}=\boxed{\frac{\mathrm{sign}(x)}{x^2+1}}.$$

《注》$\mathrm{sign}(x)$ は x の符号である．なお， $\boxed{\mathbf{3}}$ (6) の《注》を参照せよ．

(3) $(\mathrm{Sin}^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ と $(\tanh x)'=\left(\dfrac{\sinh x}{\cosh x}\right)'=\dfrac{1}{\cosh^2 x}=1-\tanh^2 x$ を用いて，

$$f'(x)=\bigl\{\mathrm{Sin}^{-1}\bigl(\tanh^{-1}x\bigr)\bigr\}'=\frac{(\tanh x)'}{\sqrt{1-\tanh^2 x}}=\frac{|\cosh x|}{\cosh^2 x}=\boxed{\frac{1}{\cosh x}}.\quad\bigl(\because \cosh x\geq 1\bigr)$$

(4) $(\tanh^{-1}x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$ を用いて，

$$f'(x)=\{\tanh^{-1}(\sin x)\}'=\frac{(\sin x)'}{1-\sin^2 x}=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\boxed{\frac{1}{\cos x}}.$$