数学演習第一（演習第 6 回）【解答例】

線形：連立 1 次方程式 (2024 年 6 月 5 日実施)

【注】 以下では, 問題の〈例〉と同じく, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に対して, 拡大係数行列 $[A\ \ \boldsymbol{b}]$ の簡約行列 $[C\ \ \boldsymbol{d}]$ を拡大係数行列にもつ連立 1 次方程式 $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ を考えるとき, 「$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ に簡約化される」「$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を簡約化して $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ を得る」といった言い方をした.

1 演習問題

$\boxed{1}$ (1) $[A\ \ \boldsymbol{b}]$ を簡約化して得られる連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x_1 \quad - \ x_3 \quad + 2x_5 = -3 \\ \quad x_2 + 3x_3 \quad - 2x_5 = \ \ 1 \\ \qquad\qquad x_4 - \frac{1}{2}x_5 = \ \ 4 \end{cases}$$

であり, 主成分に対応する変数は x_1, x_2, x_4.

(2) 主成分に関係しない変数を $x_3=s$, $x_5=t$ とおいて, 求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3+s-2t \\ 1-3s+2t \\ s \\ 4+\frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{どちらの形でもよい}} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

【注】解の表示に分数が現れないように $x_5=2t$ とおいてもよい ((3) の解答例はそのようにした).

(3) A の簡約行列は明らかに $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であり, 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は

$$\begin{cases} x_1 \quad - \ x_3 \quad + \ 2x_5 = 0 \\ \quad x_2 + 3x_3 \quad - \ 2x_5 = 0 \\ \qquad\qquad x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 0 \end{cases}$$

と簡約化される. よって, $x_3=s$, $x_5=2t$ とおいて, 求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-4t \\ -3s+4t \\ s \\ t \\ 2t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

【注】(2) の解答例と同じように $x_5=t$ とおいて解を表現してもよい.

$\boxed{2}$ (i) (問題 8.2.9 (1)) 拡大係数行列を簡約化すると,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 21 \\ 1 & 2 & 1 & 14 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 2 & 21 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{-②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[③-3\times②]{①-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{①-③} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right].$$

よって, 連立 1 次方程式は $\begin{cases} x \qquad\quad = \ 3 \\ \quad y \qquad = \ 7 \\ \qquad z = -3 \end{cases}$ と簡約化されるので, 求める解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$.

(ii) (問題 8.2.10 (1)) 拡大係数行列を簡約化すると,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow[③-①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-②]{①-②} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8 & 35 \\ 0 & 1 & 5 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

よって, 連立 1 次方程式は $\begin{cases} x_1 \quad\quad - 8x_3 = \ \ 35 \\ \quad\ \ x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$ と簡約化されるので, $x_3 = t$ とおいて, 求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35+8t \\ -22-5t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ -22 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

(iii) (問題 8.2.10 (2)) 拡大係数行列を簡約化すると, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & -6 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[③+①]{②+2\times①} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. よって, 連立 1 次方程式は $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3$ と簡約化されるので, $x_2 = s$, $x_3 = t$ とおいて, 求める解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2s+3t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

(iv) (問題 8.2.10 (3)) 拡大係数行列を行基本変形して,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[③-①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-②} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{array}\right].$$

よって, (係数行列の階数) $= 2 \neq 3 =$ (拡大係数行列の階数) となるので, 解なし.

3 (1) 行列表示すれば $\begin{bmatrix} a+1 & a \\ 3 & a+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. よって, $(a+1)(a+2) - 3a = a^2 + 2 > 0$ に注意して,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1 & a \\ 3 & a+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2+2}\begin{bmatrix} a+2 & -a \\ -3 & a+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{a^2+2}\begin{bmatrix} 3a+2 \\ -2a-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3a+2}{a^2+2} \\ -\frac{2a+5}{a^2+2} \end{bmatrix}}_{\text{どちらの形でもよい}}.$$

(2) 拡大係数行列を簡約化して,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 11 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 13 & 4 & a \end{array}\right] \xrightarrow{①-③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 13 & 4 & a \end{bmatrix} \xrightarrow[④-3\times①]{③-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 19 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 28 & a+3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[④+2\times2]{\substack{①-② \\ ③+②}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & a-5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{20}\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & a-5 \end{bmatrix} \xrightarrow[④-30\times③]{\substack{①+9\times③ \\ ②-③}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right].$$

よって, $a \neq 5$ ならば明らかに解なし. $a = 5$ ならば連立 1 次方程式は $\begin{cases} x_1 \quad\ \ + 5x_3 \quad\ \ = \ \ 3 \\ \quad\ \ x_2 - 2x_3 \quad\ \ = -4 \\ \quad\quad\quad\quad\quad x_4 = \ \ 0 \end{cases}$ と簡約化されるので, 求める解は $x_3 = t$ とおいて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-5t \\ -4+2t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

4 係数行列を簡約化して解を求める.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 5 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから, 連立 1 次方程式は $\begin{cases} x \quad\ \ + 6z = 0 \\ \quad\ \ y + 3z = 0 \end{cases}$ と簡約化される. 解は $z = t$ とおいて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6t \\ -3t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

これより, 基本解は $\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ で解の自由度は 1.

(2) $\begin{bmatrix}1&1&0&1\\3&1&1&1\\0&2&-1&2\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&-2&1&-2\\0&2&-1&2\\0&-2&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&1&-\frac{1}{2}&1\\0&2&-1&2\\0&-2&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&-\frac{1}{2}&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ であるから, 連立１次方程式は $\begin{cases} x_1 \quad + \frac{1}{2}x_3 \quad = 0 \\ \quad x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ と簡約化される. 解は $x_3 = 2s,\ x_4 = t$ とおいて

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-s\\s-t\\2s\\t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\quad (s,t \text{ は任意定数}).$$

これより, 基本解は $\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$ で, 解の自由度は 2.

5 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の１次関係式 $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ は c_1, c_2, c_3, c_4 を変数とする同次連立１次方程式

$$[\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3\ \ \boldsymbol{a}_4]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{0} \tag{$*$}$$

と見なせる. 係数行列を簡約化すると,

$$[\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3\ \ \boldsymbol{a}_4]=\begin{bmatrix}1&2&3&2\\2&0&1&3\\-1&1&3&k\\0&1&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&2\\0&-4&-5&-1\\0&3&6&k+2\\0&1&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&2\\0&1&2&1\\0&-4&-5&-1\\0&3&6&k+2\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&1\\0&0&3&3\\0&0&0&k-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&1\\0&0&0&k-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&k-1\end{bmatrix}.$$

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が１次独立とは $(*)$ の解が $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ に限られることであるから, 求める条件は $k \neq 1$.

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が１次従属とは $(*)$ が自明でない解をもつことであるから, 求める条件は $k = 1$. このとき $(*)$ の解は $c_1 = -t,\ c_2 = t,\ c_3 = -t,\ c_4 = t$ (t は任意定数). 特に, $t = -1$ と選び, 非自明な１次関係式 $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ を得る.

6 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = b$ の拡大係数行列を簡約化して, $\left[\begin{array}{ccc|c}a_1&a_2&a_3&b\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&\frac{a_2}{a_1}&\frac{a_3}{a_1}&\frac{b}{a_1}\end{array}\right]$. よって, $x_2 = a_1s,\ x_3 = a_1t$ とおいて, 求める解は

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{b}{a_1}-a_2s-a_3t\\a_1s\\a_1t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{b}{a_1}\\0\\0\end{bmatrix}+\overbrace{s\begin{bmatrix}-a_2\\a_1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-a_3\\0\\a_1\end{bmatrix}}^{\boldsymbol{a}\text{ と垂直}}\quad (s,t \text{ は任意定数}).$$

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0&-a_3&a_2\\a_3&0&-a_1\\-a_2&a_1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ であるから, $A=\begin{bmatrix}0&-a_3&a_2\\a_3&0&-a_1\\-a_2&a_1&0\end{bmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と書ける. この連立１次方程式に対する拡大係数行列に行基本変形を施して,

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0&-a_3&a_2&b_1\\a_3&0&-a_1&b_2\\-a_2&a_1&0&b_3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}0&1&-\frac{a_2}{a_3}&-\frac{b_1}{a_3}\\1&0&-\frac{a_1}{a_3}&\frac{b_2}{a_3}\\-a_2&a_1&0&b_3\end{array}\right]\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{a_1}{a_3}&\frac{b_2}{a_3}\\0&1&-\frac{a_2}{a_3}&-\frac{b_1}{a_3}\\-a_2&a_1&0&b_3\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{a_1}{a_3}&\frac{b_2}{a_3}\\0&1&-\frac{a_2}{a_3}&-\frac{b_1}{a_3}\\0&0&0&\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{a_3}\end{bmatrix}\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{a_1}{a_3}&\frac{b_2}{a_3}\\0&1&-\frac{a_2}{a_3}&-\frac{b_1}{a_3}\\0&0&0&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\end{array}\right].$$

よって, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもつための条件は $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ であり, そのときの解は $x_3 = a_3t$ とおいて,

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{b_2}{a_3}+a_1t\\-\frac{b_1}{a_3}+a_2t\\a_3t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{b_2}{a_3}\\-\frac{b_1}{a_3}\\0\end{bmatrix}+\underbrace{t\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}\text{ に平行}}\quad (t \text{ は任意定数}).$$

2 レポート問題

I (1) $\begin{bmatrix}4 & -5\\ 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\ -9\end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -5\\ 6 & 7\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}8\\ -9\end{bmatrix} = \dfrac{1}{58}\begin{bmatrix}7 & 5\\ -6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\ -9\end{bmatrix} = \dfrac{1}{58}\begin{bmatrix}11\\ -84\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{11}{58}\\ -\frac{42}{29}\end{bmatrix}$.

(2) $\left[\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & 2 & 1\\ 4 & -1 & 3 & -1\\ 2 & 3 & 1 & k\end{array}\right] \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix}4 & -1 & 3 & -1\\ 3 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1 & k\end{bmatrix} \xrightarrow{①-②} \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -2\\ 3 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1 & k\end{bmatrix} \xrightarrow[③-2\times①]{②-3\times①} \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 7 & -1 & 7\\ 0 & 7 & -1 & k+4\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{③-②} \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 7 & -1 & 7\\ 0 & 0 & 0 & k-3\end{bmatrix}$

と変形される. これより, $k \neq 3$ のとき, 解なし. $k = 3$ のときは行基本変形を続けて,

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}\times②} \begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{①+2\times②} \begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{5}{7} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

よって, 連立1次方程式は $\begin{cases} x \qquad + \frac{5}{7}z = 0\\ \qquad y - \frac{1}{7}z = 1\end{cases}$ と簡約化されるので, $z = 7t$ とおいて, 求める解は

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5t\\ 1+t\\ 7t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-5\\ 1\\ 7\end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

以上をまとめて, $k \neq 3$ のとき解なし. $k = 3$ のとき $\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-5\\ 1\\ 7\end{bmatrix}$ $(t$ は任意定数$)$.

(3) 拡大係数行列を簡約行列に変形する.

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2\\ 1 & -3 & 5 & -4 & 7\end{array}\right] \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3 & -3 & 6\end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

これに対応する連立1次方程式は $\begin{cases} x_1 \qquad + 2x_3 - x_4 = 1\\ \qquad x_2 - x_3 + x_4 = -2\end{cases}$, すなわち $\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_3 + x_4\\ x_2 = -2 + x_3 - x_4\end{cases}$. これより, $x_3 = s,\ x_4 = t$ とおいて, 求める解は

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 1 - 2s + t\\ x_2 = -2 + s - t\\ x_3 = s\\ x_4 = t\end{cases}} \quad \text{あるいは} \quad \boxed{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -2\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

II $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ は $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ と書かれることに注意する.

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 5 & -6\\ 7 & -8 & k\end{bmatrix} \xrightarrow[③-7\times①]{②+4\times①} \begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -3 & 6\\ 0 & 6 & k-21\end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}\times②} \begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 6 & k-21\end{bmatrix} \xrightarrow[③-6\times②]{①+2\times②} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & k-9\end{bmatrix}$$

と変形されるから, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が1次従属であるための条件は $k = 9$ である. 更に, このとき, c_1, c_2 に関する連立1次方程式は $\begin{cases} c_1 \qquad - c_3 = 0\\ \qquad c_2 - 2c_3 = 0\end{cases}$ と簡約化されるので, $c_3 = t$ とおいて, $\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t\\ 2t\\ t\end{bmatrix}$. よって, $t = 1$ ととることにより, 1つの非自明な1次関係式は $\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$.