数学演習第一（演習第7回）

微積：高次の導関数, テーラーの定理, 有限テーラー展開

2024 年 6 月 19 日

要点 1

1°. $\boldsymbol{n}$ 回微分可能, $\boldsymbol{n}$ 回連続微分可能 ($\boldsymbol{C^n}$ 級)

- 微分可能 = 1 回微分可能, 導関数 = 1 次導関数と解釈する. $n \geqslant 2$ に対して, 帰納的に, $f(x)$ が $n-1$ 回微分可能で, $n-1$ 次導関数 $f^{(n-1)}(x)$ が微分可能なとき, $f(x)$ は **$\boldsymbol{n}$ 回微分可能** であるといい, $f^{(n-1)}(x)$ の導関数 $f^{(n)}(x) := \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x)$ を **$\boldsymbol{n}$ 次導関数**という.
- $f(x)$ が n 回微分可能で n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続のとき, $f(x)$ は **$\boldsymbol{n}$ 回連続微分可能**または **$\boldsymbol{C^n}$ 級**という. (微分可能なら連続ゆえ) $f(x)$ が n 回微分可能ならば C^{n-1} 級であることが保証される. また, $f(x)$ が何回でも微分可能なとき, $f(x)$ は**無限回微分可能**または **$\boldsymbol{C^\infty}$ 級**という.

2°. Leibniz（ライプニッツ）の公式

$f(x), g(x)$ が n 回微分可能ならば, 積 $f(x)g(x)$ も n 回微分可能であり, 次の関係式が成り立つ:

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x). \qquad (\text{注: } f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = f'')$$

3°. 基本的な関数の $\boldsymbol{n}$ 次導関数

① $(e^x)^{(n)} = e^x$. ② $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. ③ $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

④ $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. 一般に, $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ (α は定数, $n \geqslant 1$).

⑤ $(\log x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ ($n \geqslant 1$).

要点 2

1°. 有限 Taylor（テイラー）展開

$f(x)$ が a を含む開区間 I で N 回微分可能なとき, 各 $x \in I$ に対して,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_N(x), \qquad \underbrace{R_N(x)}_{N\text{ 次の剰余項}} = \frac{f^{(N)}(a+\theta(x-a))}{N!}(x-a)^N$$

を満たす θ ($0 < \theta < 1$) が存在する. 特に, $a = 0$ の場合を有限 **Maclaurin（マクローリン）** 展開という.

2°. 基本的な関数の有限 Maclaurin（マクローリン）展開

① $e^x = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} + R_N(x)$.

② $\cos x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + R_{2M}(x)$, ③ $\sin x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} + R_{2M+1}(x)$.

④ $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x^n + R_N(x)$, ⑤ $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + R_N(x)$ ($x > -1$).

1　演習問題

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ の導関数を求め, C^1 級かどうかを調べよ.

$\boxed{2}$ (1) 開区間 I 上の C^2 級関数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ が与えられたとき, $\varphi'(t) \neq 0$ $(t \in I)$ であれば, y は x の C^2 級関数となる. このとき, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せば, 次の式が得られる. これを示せ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\{\varphi'(t)\}^3}.$$

(2) 曲線 $x = \varphi(t) = \sinh t$, $y = \psi(t) = \cosh t$ 上の点 $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ において, $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の値を求めよ.

$\boxed{3}$ 次の各関数 $y = y(x)$ について, n 次導関数 $y^{(n)}$ を求めよ (演習書 問題 3.2.5 類題).

(0) **要点 1** の 3° を確認せよ.　　(1) $y = f(ax+b)$ (f は C^∞ 級, a, b は定数で $a \neq 0$)

(2) $y = \log \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-x}}$　　(3) $y = \cos^2 x$ ($\cos 2x$ で表す)　　(4) $y = \dfrac{1}{1-2x-3x^2}$ (部分分数分解)

(5) $y = x^3 e^{-2x}$ (ライプニッツの公式)　　(6) $y = e^x \sin x$ (まず y' を三角関数の合成で整理)

(7) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (**2** 重階乗を用いて表せ)　　但し, n の **2** 重階乗 $n!!$ は

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdots n & (n \text{ 以下の奇数の積}) \quad \text{if } n \geqslant 1 : \text{奇数} \\ 2 \cdot 4 \cdots n & (n \text{ 以下の偶数の積}) \quad \text{if } n \geqslant 2 : \text{偶数} \end{cases} \quad \text{および} \quad (-1)!! = 0!! = 1$$

で定義される. 従って, 例えば $n! = (n-1)!! \cdot n!!$, $(2n)!! = 2^n n!$ $(n \geqslant 0)$ が成り立つ.

$\boxed{4}$ (演習書 問題 3.2.7 類題) 次の各関数 $f(x)$ に対して, $f^{(n)}(0)$ を計算し, 有限マクローリン展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N \quad \underset{\theta \text{ は } x, N \text{ に依存}}{(0 < {}^\exists\theta < 1)}$$

を求めよ. 更に, $N = 6$ $(M = 3)$ のとき, 剰余項以外の部分を (記号 $\sum$ を使わず) 具体的に書け.

(0) **要点 2** の 2° を確認せよ.　　(1) $f(x) = \dfrac{1}{1-2x-3x^2}$　　(2) $f(x) = e^x \sin x$

(3) $f(x) = \cosh x$　　(4) $f(x) = \sinh x$　((3) は要点 2 の 2° の ② の形, (4) は ③ の形に)

$\boxed{5}$ $f(x) = x^3 \sin x$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ は

$$f^{(n)}(x) = p_n(x) \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + q_n(x) \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (p_n(x), q_n(x) \text{ は } x \text{ の整式})$$

の形に表される. $p_n(x)$, $q_n(x)$ を求めよ. (ライプニッツの公式と $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$ を用いる)

$\boxed{6}$ 関数 x^p, $\dfrac{1}{x^p}$ $(p \in \mathbb{N})$ に対して, $x = 1$ における有限 Taylor 展開を N 次 $(N > p)$ の剰余項 $R_N(x)$ まで求めよ.

$\boxed{7}$ $f(x)$ が 0 を含む開区間 I で C^∞ 級のとき, 任意の自然数 N に対して $f(x)$ は $\boxed{4}$ で述べた形の有限マクローリン展開をもつ. そこに現れる x^n の係数 $a_n := \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ について以下の問いに答えよ.

(0) $f(x)$ が奇関数 (すなわち $f(-x) = -f(x)$) のとき $a_{2m} = 0$ となることを示せ. また, $f(x)$ が偶関数 (すなわち $f(-x) = f(x)$) のとき $a_{2m+1} = 0$ となることを示せ.

以下の関数 $f(x)$ は両方とも奇関数なので $f^{(2m)}(0) = a_{2m} = 0$ $(m \geqslant 0)$ が成り立つことに注意する．

(1) $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\, x$ $(-1 < x < 1)$ のとき，① $(1-x^2)f''(x) = xf'(x)$ を示せ．② この両辺を n 回微分して次式を示せ: $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0 \quad (n \geqslant 0)$．③ $f^{(2m+1)}(0) = \{(2m-1)!!\}^2$ $(m \geqslant 0)$ を示せ．④ a_{2m+1} $(m \geqslant 0)$ を求めよ．(例題 3.10 参照)

(2) $f(x) = \tan x$ に対して，① $f'(x) = 1 + f(x)^2$ を確認せよ． ② 前式の両辺を n 回微分して $f^{(n+1)}(x)$ を $f^{(j)}(x)$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ で表せ． ③ $f^{(2m+1)}(0)$ を $f^{(2k+1)}(0)$ $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ で表せ． ④ a_{2m+1} を a_{2k+1} $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ で表せ． ⑤ a_1, a_3, a_5, a_7 を求めよ．

2 レポート課題（WebClass へ提出）

問 1 $f(x) = e^{\sqrt{3}x}\sin x$ の n 次導関数を，$f^{(n)}(x) = a_n e^{\sqrt{3}x}\sin(x + \theta n)$ の形で表せ．ただし，a_n は n の式とし (x には依存しない)，$0 \leqslant \theta < 2\pi$ とする．

問 2 $f(x) = e^{\sqrt{3}x}\sin x$ の有限マクローリン展開 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{4} a_n x^n + R_5(x)$ を求めよ．($R_5(x)$も計算せよ)

問 3 $f(x) = \log(1-4x^2)$ の n 次導関数を求めよ．

問 4 $f(x) = \log(1-4x^2)$ の有限マクローリン展開 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{4} a_n x^n + R_5(x)$ を求めよ．($R_5(x)$も計算せよ)