数学演習第一（演習第 7 回）【解答例】

微積： 高次の導関数, テーラーの定理, 有限テーラー展開（2024 年 6 月 19 日実施）

1　演習問題

$\boxed{1}$ $f(x)$ は明らかに $x \neq 0$ において C^∞ 級であり, そこでの導関数は

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

また, $x = 0$ における微分係数は

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0 \quad (\text{最後の等号は } |h\sin(1/h)| \leqslant |h| \to 0 \text{ による}).$$

よって, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能であり, その導関数は

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で与えられる．ここで, $x \to 0$ のとき, $x\sin(1/x) \to 0$ であるが, $\cos(1/x)$ は 1 つの値に近づき得ないので $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でない．(より直接的には, 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = 1/(n\pi)$ で定めれば, $n \to \infty$ のとき, $a_n \to 0$ であるが, $f'(a_n) = -(-1)^n \not\to 0 = f'(0)$ であるから, $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でない.) よって, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能だが, $x = 0$ の周りで C^1 級でない.

$\boxed{2}$ (1) まず, 仮定より $x = \varphi(t)$ の逆関数 $t = \varphi^{-1}(x)$ が存在し, $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ と書ける．よって, y を x で微分すれば, 合成関数・逆関数の微分公式を用いて,

$$\frac{dy}{dx} = \{\psi(\varphi^{-1}(x))\}' = \psi'(\varphi^{-1}(x))\{\varphi^{-1}(x)\}' = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (x = \varphi(t)).$$

次に, $\omega(t) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ とおけば, $\dfrac{dy}{dx} = \omega(\varphi^{-1}(x))$ と書けるから, 上と同じ論法で $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \{\omega(\varphi^{-1}(x))\}' = \dfrac{\omega'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$. ここで, $\omega'(t) = \dfrac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^2}$ より,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^3} \quad (x = \varphi(t)).$$

次のように表現することもできる:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

(2) $\varphi(\log 2) = \dfrac{1}{2}(e^{\log 2} - e^{-\log 2}) = \dfrac{1}{2}(2 - \dfrac{1}{2}) = \dfrac{3}{4}$, $\psi(\log 2) = \dfrac{1}{2}(e^{\log 2} + e^{-\log 2}) = \dfrac{1}{2}(2 + \dfrac{1}{2}) = \dfrac{5}{4}$. よって，$t = \log 2$ のとき，$(x, y) = (\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4})$. これより，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(\log 2)}{\varphi'(\log 2)} = \dfrac{\varphi(\log 2)}{\psi(\log 2)} = \boxed{\dfrac{3}{5}}$. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\varphi'(\log 2)\psi''(\log 2) - \varphi''(\log 2)\psi'(\log 2)}{\{\varphi'(\log 2)\}^3} = \dfrac{\{\psi(\log 2)\}^2 - \{\varphi(\log 2)\}^2}{\{\psi(\log 2)\}^3} = \boxed{\dfrac{64}{125}}$.

$\boxed{3}$ (n の範囲がなければ $n \geqslant 0$ で正しいことを意味する.)

(0) ① $y = e^x$ は微分に対して不変であるから, 明らかに $y^{(n)} = e^x$. ②,③ $(\cos x)' = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, $(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ であるから, $\cos x$, $\sin x$ はともに 1 回微分するごとに “偏角” が $\frac{\pi}{2}$ ずつ増えていく．よって, $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$, $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$. ④ $y = x^\alpha$ のとき, $y^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$ $(n \geqslant 1)$. 特に, $y = 1/x = x^{-1}$ $(\alpha = -1)$ のとき, $y^{(n)} = (-1)(-2)\cdots(-n)x^{-n-1} = (-1)^n n!/x^{n+1}$. ⑤ $(\log x)^{(n)} = (1/x)^{(n-1)} = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$ $(n \geqslant 1)$.

(1) $y' = f'(ax+b)\cdot(ax+b)' = af'(ax+b)$. これを繰り返して, $y^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$.

(2) $y = \frac{1}{2}(\log(1+2x) - \log(1-x)) = \frac{1}{2}(\log(2x+1) - \log((-1)x+1))$ より, (0) ⑤ と (1) を用いて, $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}\{\frac{2^n}{(1+2x)^n} - \frac{(-1)^n}{(1-x)^n}\}$ $(n \geqslant 1)$.

(3) $y=\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ より, (0) ② と (1) を用いて, $y^{(n)}=\frac{1}{2}\cdot 2^n\cos(2x+\frac{n\pi}{2})=2^{n-1}\cos(2x+\frac{n\pi}{2})$.

(4) $y=\dfrac{1}{(1+x)(1-3x)}=\dfrac{1}{4}\Bigl(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{3}{1-3x}\Bigr)$ と部分分数分解し, (0) ④と (1) の結果を用いて,

$$y^{(n)}=\Bigl(\frac{1}{1-2x-3x^2}\Bigr)^{(n)}=\frac{1}{4}\Bigl\{\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}+\frac{3\cdot(-3)^n(-1)^n n!}{(1-3x)^{n+1}}\Bigr\}=\frac{n!}{4}\Bigl\{\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}+\frac{3^{n+1}}{(1-3x)^{n+1}}\Bigr\}.$$

(5) $y=x^3e^{-2x}$ より, $n\geqslant 3$ に対して, $y^{(n)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^3)^{(k)}(e^{-2x})^{(n-k)}=x^3\cdot(-2)^n e^{-2x}+n\cdot 3x^2\cdot(-2)^{n-1}e^{-2x}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 6x\cdot(-2)^{n-2}e^{-2x}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot 6\cdot(-2)^{n-3}e^{-2x}=(-2)^{n-3}e^{-2x}\{-8x^3+12nx^2-6n(n-1)x+n(n-1)(n-2)\}$. この式は, $n=0,1,2$ でも正しい.

(6) $y'=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\,e^x\sin\bigl(x+\frac{\pi}{4}\bigr)$. これを繰り返して, $y^{(n)}=(\sqrt{2})^n e^x\sin\bigl(x+\frac{n\pi}{4}\bigr)$.

(7) $y^{(n)}=\Bigl(-\dfrac{1}{2}\Bigr)\Bigl(-\dfrac{1}{2}-1\Bigr)\cdots\Bigl(-\dfrac{1}{2}-(n-1)\Bigr)x^{-\frac{1}{2}-n}=(-1)^n\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdots\dfrac{2n-1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}-n}=\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n x^{(2n+1)/2}}$.

4 以下, N 次剰余項 $R_N(x)$ の表現式の中の θ は $0<\theta<1$ を満たす適当な数 (x, N に依存) を表す.

(0) ① $f(x)=e^x$ より, $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$ ($n\geqslant 0$). よって,

$$e^x=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{x^n}{n!}+R_N(x),\quad R_N(x)=\frac{e^{\theta x}}{N!}x^N.$$

$N=6$ なら, $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^5}{5!}+R_6(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^5}{120}+R_6(x)$.

② $f^{(n)}(x)=\cos\bigl(x+\dfrac{n\pi}{2}\bigr)$, $f^{(n)}(0)=\cos\dfrac{n\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^m & (n=2m)\\ 0 & (n=2m+1)\end{cases}$ $(n\geqslant 0)$ より,

$$\cos x=\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}+R_{2M}(x),\quad R_{2M}(x)=\frac{\cos(\theta x+\frac{2M\pi}{2})}{(2M)!}x^{2M}=\frac{(-1)^M\cos\theta x}{(2M)!}x^{2M}.$$

$M=3$ なら, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+R_6(x)=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+R_6(x)$.

③ $f^{(n)}(x)=\sin\bigl(x+\dfrac{n\pi}{2}\bigr)$, $f^{(n)}(0)=\sin\dfrac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & (n=2m)\\ (-1)^m & (n=2m+1)\end{cases}$ $(n\geqslant 0)$ より,

$$\sin x=\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}+R_{2M+1}(x),$$

$$R_{2M+1}(x)=\frac{\sin(\theta x+\frac{(2M+1)\pi}{2})}{(2M+1)!}x^{2M+1}=\frac{(-1)^M\cos\theta x}{(2M+1)!}x^{2M+1}.$$

$M=3$ なら, $\sin x=\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+R_7(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+R_7(x)$.

④ $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ $(n\geqslant 0)$ より, $f^{(n)}(0)=(-1)^n n!$ $(n\geqslant 0)$. よって, $x>-1$ に対して,

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n x^n+R_N(x),\quad R_N(x)=\frac{(-x)^N}{(1+\theta x)^{N+1}}\underbrace{=\frac{(-x)^N}{1+x}}_{\text{等比数列の和の公式による}}.$$

$N=6$ なら, $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+R_6(x)$.

⑤ $f(x)=\log(1+x)$ より, $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ $(n\geqslant 1)$. 故に, $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ $(n\geqslant 1)$. よって, $x>-1$ に対して,

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+R_N(x),\quad R_N(x)=\frac{(-1)^{N-1}}{N(1+\theta x)^N}x^N.$$

$N=6$ なら, $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^5}{5}+R_6(x)$.

(1) $\boxed{3}$(4) の結果から, $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{4}\{(-1)^n + 3^{n+1}\}$, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^n + 3^{n+1}}{4}$ $(n \geqslant 0)$. よって,

$$\frac{1}{1-2x-3x^2} = \sum_{n=0}^{N-1}\{\frac{(-1)^n+3^{n+1}}{4}\}x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{1}{4}\left\{\frac{(-1)^N}{(1+\theta x)^{N+1}} + \frac{3^{N+1}}{(1-3\theta x)^{N+1}}\right\}x^N.$$

$N=6$ なら, $\frac{1}{1-2x-3x^2} = 1 + 2x + 7x^2 + 20x^3 + 61x^4 + 182x^5 + R_6(x)$.

(2) $\boxed{3}$(6) の結果から, $f^{(n)}(0) = (\sqrt{2})^n \sin(\frac{n\pi}{4})$, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\sin(\frac{n\pi}{4})$ $(n \geqslant 0)$. よって,

$$e^x \sin x = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\sin(\frac{n\pi}{4}) \cdot x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{(\sqrt{2})^N}{N!}e^{\theta x}\sin(\theta x + \frac{N\pi}{4}) \cdot x^N.$$

$N=6$ なら, $e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + R_6(x)$.

(3) $f(x) = \cosh x$ より, $f^{(2m)}(x) = \cosh x, f^{(2m+1)}(x) = \sinh x$; $f^{(2m)}(0) = 1, f^{(2m+1)}(0) = 1$ $(m \geqslant 0)$. 故に,

$$\cosh x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + R_{2M}(x), \quad R_{2M}(x) = \frac{\cosh \theta x}{(2M)!}x^{2M}.$$

$M=3$ なら, $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_6(x)$.

(4) $f(x) = \sinh x$ より, $f^{(2m)}(x) = \sinh x, f^{(2m+1)}(x) = \cosh x$; $f^{(2m)}(0) = 0, f^{(2m+1)}(0) = 1$ $(m \geqslant 0)$. 故に,

$$\sinh x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1} + R_{2M+1}(x), \quad R_{2M+1}(x) = \frac{\cosh \theta x}{(2M+1)!}x^{2M+1}.$$

$M=3$ なら, $\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + R_7(x)$.

$\boxed{5}$ $n \geqslant 3$ のとき, $f(x) = x^3 \sin x$ に Leibniz の公式を適用して,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= x^3(\sin x)^{(n)} + n \cdot 3x^2\,(\sin x)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 6x\,(\sin x)^{(n-2)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot 6\,(\sin x)^{(n-3)} \\
&= x^3 \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 3nx^2 \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + 3n(n-1)x \sin\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right) \\
&\quad + n(n-1)(n-2) \sin\left(x + \frac{(n-3)\pi}{2}\right) \\
&= \{x^3 - 3n(n-1)x\} \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + \{-3nx^2 + n(n-1)(n-2)\} \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

この式は $n = 0, 1, 2$ でも正しい. よって, $p_n(x) = x^3 - 3n(n-1)x$, $q_n(x) = -3nx^2 + n(n-1)(n-2)$.

$\boxed{6}$ (1) $x^p = \{1 + (x-1)\}^p = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n}(x-1)^n$. $(R_N(x) = 0)$

(2) $\left(\frac{1}{x^p}\right)^{(n)} = (-p)(-p-1)\cdots(-p-n+1)\frac{1}{x^{p+n}} = (-1)^n p(p+1)\cdots(p+n-1)\frac{1}{x^{p+n}} = (-1)^n \frac{(n+p-1)!}{(p-1)!}\frac{1}{x^{p+n}}$

より, $\frac{1}{x^p} = \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\binom{n+p-1}{n}(x-1)^n + R_N(x)$, $R_N(x) = \binom{N+p-1}{N}\frac{(-1)^N(x-1)^N}{\{1+\theta(x-1)\}^{N+p}}$ $(0 < \theta < 1)$.

$\boxed{7}$ (1) 最初に $\frac{d^n}{dx^n}f(-x) = (-1)^n f^{(n)}(-x)$ に注意する.

- $f(x)$ が奇関数のとき: $f(-x) = -f(x)$ の両辺を $2m$ 回微分して, $f^{(2m)}(-x) = -f^{(2m)}(x)$. これより $f^{(2m)}(0) = -f^{(2m)}(0)$, すなわち $f^{(2m)}(0) = 0$ が得られ, $a_{2m} = \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!} = 0$.
- $f(x)$ が偶関数のとき: $f(-x) = f(x)$ の両辺を $2m+1$ 回微分して, $-f^{(2m+1)}(-x) = f^{(2m+1)}(x)$. これより $-f^{(2m+1)}(0) = f^{(2m+1)}(0)$, すなわち $f^{(2m+1)}(0) = 0$ が得られ, $a_{2m+1} = \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} = 0$.

(2) ① $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ より, $(1-x^2)f''(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = xf'(x)$.

② $(1-x^2)f''(x) = xf'(x)$ の両辺を n 回 $(n \geqslant 1)$ 微分すると, Leibniz の公式により

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - n \cdot 2xf^{(n+1)}(x) - \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2f^{(n)}(x) = xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x).$$

これを整理して, $(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0$. ($n=0$ での成立は明らか).

③ $n=2m-1$ ($m\geqslant 1$) の場合の ② の関係式に $x=0$ を代入して, $f^{(2m+1)}(0)=(2m-1)^2f^{(2m-1)}(0)$. この関係式を繰り返し用いて, $m\geqslant 1$ に対し

$$f^{(2m+1)}(0)=(2m-1)^2f^{(2m-1)}(0)=\cdots=(2m-1)^2\cdots 3^2\cdot 1^2 f'(0)=\{(2m-1)!!\}^2.$$

ここで, $f'(0)=1$ を用いた. $(-1)!!=1$ に注意すれば, $f^{(2m+1)}(0)=\{(2m-1)!!\}^2$ $(m\geqslant 0)$.

④ $a_{2m+1}=\dfrac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!}=\dfrac{\{(2m-1)!!\}^2}{(2m+1)!!(2m)!!}=\dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\dfrac{1}{2m+1}$ $(m\geqslant 0)$.

(3) ① $f(x)=\tan x$ より, $f'(x)=1+\tan^2 x=1+f(x)^2$.

② $n\geqslant 1$ のとき $f'(x)=1+f(x)^2$ を n 回微分して, $f^{(n+1)}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f^{(n-j)}(x)f^{(j)}(x)$. $n=0$ のときは $f'(x)=1+f(x)^2$.

③ $f^{(2k)}(0)=0$ より,

$$f^{(2m+1)}(0)=\sum_{j=0}^{2m}\binom{2m}{j}f^{(2m-j)}(0)f^{(j)}(0)=\sum_{k=0}^{m-1}\binom{2m}{2k+1}f^{(2m-2k-1)}(0)f^{(2k+1)}(0)\quad(m\geqslant 1).$$

④ $a_{2m+1}=\dfrac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!}=\dfrac{(2m)!}{(2m+1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\dfrac{f^{(2m-2k-1)}(0)f^{(2k+1)}(0)}{(2m-2k-1)!(2k+1)!}=\dfrac{1}{2m+1}\sum_{k=0}^{m-1}a_{2m-2k-1}a_{2k+1}$ $(m\geqslant 1)$.

⑤ $a_1=f'(0)=1$ と④の関係式を用いて,

$$a_1=1,\quad a_3=\frac{1}{3}a_1^2=\frac{1}{3},\quad a_5=\frac{1}{5}(a_3a_1+a_1a_3)=\frac{2}{15},\quad a_7=\frac{1}{7}(a_5a_1+a_3^2+a_1a_5)=\frac{17}{315}.$$

2 レポート課題

問 1 $f'(x)=\sqrt{3}e^{\sqrt{3}x}\sin x+e^{\sqrt{3}x}\cos x=2e^{\sqrt{3}x}\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$. これを繰り返して, $f^{(n)}(x)=\boxed{2^ne^{\sqrt{3}x}\sin(x+\dfrac{n\pi}{6})}$. $(n\geqslant 0)$

問 2 $f^{(0)}(0)=0$, $f^{(1)}(0)=1$, $f^{(2)}(0)=2\sqrt{3}$, $f^{(3)}(0)=8$, $f^{(4)}(0)=8\sqrt{3}$ なので,

$$e^{\sqrt{3}x}\sin x=\sum_{n=0}^{4}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_5(x)=\boxed{x+\sqrt{3}x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{x^4}{\sqrt{3}}+\frac{4}{15}e^{\sqrt{3}\theta x}\sin(\theta x+\frac{5\pi}{6})\cdot x^5}.$$

問 3 $f(x)=\log(1+2x)+\log(1-2x)$ なので,

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,2^n}{(1+2x)^n}+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,(-2)^n}{(1-2x)^n}\\&=\boxed{(-1)^{n-1}(n-1)!\left\{\frac{2^n}{(1+2x)^n}+\frac{(-2)^n}{(1-2x)^n}\right\}}.\ (n\geqslant 1)\end{aligned}$$

問 4 $f^{(0)}(0)=0$, $f^{(1)}(0)=0$, $f^{(2)}(0)=-8$, $f^{(3)}(0)=0$, $f^{(4)}(0)=-3!\,2^5$ なので,

$$\log(1-4x^2)=\sum_{n=0}^{4}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_5(x)=\boxed{-4x^2-8x^4+\frac{32}{5}\left\{\frac{1}{(1+2\theta x)^5}-\frac{1}{(1-2\theta x)^5}\right\}x^5}.$$