数学演習第一 (演習第 8 回)

線形：正則行列，逆行列，2 次または 3 次の行列式

2024 年 6 月 26 日

要点

I. n 次正方行列 A に対して $AB = BA = E_n$ (E_n は n 次単位行列) を満たす行列 B が存在するとき，A を**正則行列**または A は**正則である**といい，B を A の**逆行列**という．

II. 正則行列 A に対して，A の逆行列はただ一つに定まる．A の逆行列を A^{-1} と書く．（線形教科書 p.26）

III. n 次正方行列 A, B が $AB = E_n$ を満たせば，A と B はともに正則で互いに逆行列．（線形教科書 p.59）

IV. 2 次正方行列の場合は，$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が正則 $\Leftrightarrow$ $ad - bc \neq 0$. このとき, A の逆行列は

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

V. n 次正方行列 A に対して，$[A \ \ E_n]$ の（行基本変形による）簡約行列が $[E_n \ \ B]$ となるならば，A は正則であり $B = A^{-1}$ である．$[A \ \ E_n]$ の簡約行列の左側の行列 (これは A の簡約行列に一致する) が E_n にならないとき，A は正則でない．（線形教科書 pp. 59–61）特に，

$$\boxed{A \text{ が正則} \Longleftrightarrow \operatorname{rank} A = n}$$

VI. 2 次正方行列，3 次正方行列の行列式はそれぞれ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

となる．（線形教科書 p.66）

VII. 平面ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積は $|\boldsymbol{a} \ \ \boldsymbol{b}|$（行列式）の絶対値，空間ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ の作る平行六面体の体積は $|\boldsymbol{p} \ \ \boldsymbol{q} \ \ \boldsymbol{r}|$（行列式）の絶対値で与えられる．（線形教科書 pp. 85–86） $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ の作る四面体の体積は，平行六面体の体積の 1/6 倍になる．

例. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ のとき，$[A \ \ E_3]$ を行基本変形により簡約行列に変形すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-3\times①]{②+4\times①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[②\leftrightarrow③]{-1\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[②+2\times③]{①+③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

となるので，V より A は正則であり，逆行列は $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1　演習問題

1　$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ とする．

(1) $|A|$ を求めよ．

(2) $A\widetilde{A}$ を計算せよ．

(3) (2) の結果を用いて，$|A| \neq 0$ のとき A は正則行列であることを示し，A^{-1} を求めよ．

(4) $|AB| = |A||B|$ を示せ．（ヒント：両辺をそれぞれ計算する）

(5) $|A| \neq 0$ と A が正則であることは同値であることを示せ．（ヒント: **1** と (4) を使う）

2　以下の行列が正則かどうか調べよ．さらに，正則であれば逆行列を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} e^x & -1 \\ 0 & e^y \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

3　2×2 行列 A, B に対して，以下の (1) $\sim$ (5) は成り立つか？成り立つ場合は証明し，成り立たない場合は反例（成り立たない行列の具体例）をあげよ．ただし，(1) において λ は実数，(5) において A は正則とする．

(1)　$|\lambda A| = \lambda |A|$　　(2)　$|AB| = |BA|$　　(3)　$|A + B| = |A| + |B|$

(4)　$|{}^t A| = |A|$　　(5)　$|A^{-1}| = |A|^{-1}$

4　m 次正方行列 A, $m \times n$ 行列 B に対して，$m \times (m+n)$ 行列 $[A \quad B]$ に行基本変形を繰り返して $[E_m \quad C]$ まで変形できれば，A は正則であり $C = A^{-1}B$ が成り立つ（各自確認すること）．この事実を用いて

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

に対して以下の問いに答えよ．

(1) $AX = B$ を満たす 3 次正方行列 X を求めよ．

(2) $YA = B$ を満たす 3 次正方行列 Y を求めよ．（ヒント: 転置をとる）

5　以下の行列式を求めよ．ただし，(2) については因数分解された形で答えよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} \lambda + 2 & 4 & 5 \\ 1 & \lambda - 1 & -1 \\ -2 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$

$\boxed{6}$ 正方行列 A が ${}^tAA = E$ を満たすとき，A を**直交行列**という．III より直交行列は正則行列であり，$A^{-1} = {}^tA$ となることに注意せよ．

(1) $P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ は直交行列であることを示せ．さらに，P の逆行列を求めよ．

(2) $Q = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$ は直交行列であることを示せ．さらに，Q の逆行列を求めよ．

(3) $\boxed{5}$(3) の行列を R とする．$r\sin\theta \neq 0$ とき，${}^tR$ の逆行列を求めよ．（ヒント：まず R を Q とある対角行列 D の積で表す）

$\boxed{7}$ 平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ および空間ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 S を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る三角形の面積 T を求めよ．

(3) $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ の作る平行六面体の体積 V を求めよ．

(4) $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ の作る四面体の体積 W を求めよ．

2 レポート問題（WebClass へ提出）

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 1 \\ \sin\theta & 1 \end{bmatrix}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ が正則となるための θ に対する条件を求めよ．また，その条件が成り立つとき，A^{-1} を求めよ．

$\boxed{2}$ 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & k \end{bmatrix}$ に対し，以下の問いに答えよ．

(1) A が正則となるための k に対する条件を求めよ．

(2) $k = 5$ のとき，A^{-1} を求めよ．

$\boxed{3}$ 空間ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ の作る四面体の体積 V を求めよ．