数学演習第一（演習第９回）【解答例】

微積： 漸近展開, 積分の計算 (1)　　2024 年 7 月 3 日

要点（漸近展開の要点）

空欄の中身は並んでいる順に

$$\boxed{\frac{1}{n!}},\quad \boxed{\frac{(-1)^n}{(2n)!}},\quad \boxed{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}},\quad \boxed{\frac{(-1)^{n-1}}{n}},\quad \boxed{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}},\quad \boxed{(-1)^n}.$$

1　演習問題

1 (本問でランダウの記号 $o(x^n)$ を使うときはいつも，$x\to 0$ が省略されている.)

(1)　(d) $(\alpha=-\frac{1}{2})$ を用いて，$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\frac{-\frac{1}{2}}{1!}x+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2+o(x^2)=\boxed{1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)}$.

(2)　(d) $(\alpha=\frac{1}{2})$ を用いて，$\displaystyle\sqrt{1+x}=1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}x+\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2+o(x^2)=\boxed{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)}$.

(3)　(a) より $\displaystyle e^{\pm x}=1\pm x+\frac{1}{2}x^2\pm\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4\pm\frac{1}{120}x^5+o(x^5)$ (複号同順) であるから,

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\boxed{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)},\quad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\boxed{x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)}.$$

【注意】
$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+o(x^7),\\
\cosh x &= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}+o(x^7),\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7),\\
\sinh x &= x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^7}{5040}+o(x^7),\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+o(x^7).
\end{aligned}$$

(4)　(a) を用いて，$\displaystyle 3^x=(e^{\log 3})^x=e^{(\log 3)x}=\boxed{1+(\log 3)x+\frac{(\log 3)^2}{2}x^2+o(x^2)}$.

(5)　(c) より, $\displaystyle\log(2+x)=\log 2+\log\Big(1+\frac{x}{2}\Big)=\log 2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\Big(\frac{x}{2}\Big)^2+o(x^2)=\boxed{\log 2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)}$.

(6)　部分分数分解した後に (d) $(\alpha=-1)$ を用いて,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x-2x^2}&=\frac{1}{(1+x)(1-2x)}=\frac{1}{3}\Big(\frac{2}{1-2x}+\frac{1}{1+x}\Big)\\
&=\frac{1}{3}\Big\{2\big(1+2x+(2x)^2+(2x)^3+o(x^3)\big)+\big(1-x+x^2-x^3+o(x^3)\big)\Big\}=\boxed{1+x+3x^2+5x^3+o(x^3)}.
\end{aligned}$$

《別法》
$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x-2x^2}&=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1-2x}=\big(1-x+x^2-x^3+o(x^2)\big)\big(1+2x+(2x)^2+(2x)^3+o(x^2)\big)\\
&=1+x+3x^2+5x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

(7)　(b) より $\displaystyle\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)$, $\displaystyle\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$. これを用いて,

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\Big\{1-\Big(1-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{24}-\frac{(2x)^6}{720}+o(x^6)\Big)\Big\}=x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{2x^6}{45}+o(x^6).$$

よって, $\displaystyle\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2=\frac{\sin^2 x}{x^2}=\boxed{1-\frac{x^2}{3}+\frac{2x^4}{45}+o(x^4)}$.

《別法》 $\displaystyle\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2=\Big(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\Big)^2=1-\frac{x^2}{3}+\frac{2x^4}{45}+o(x^4)$.

(8)　(a), (b) を用いて，$\displaystyle e^{-x}\cos x=\Big(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\Big)\Big(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\Big)=\boxed{1-x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}$.

(9) (b) より $\dfrac{x}{\sin x} = \dfrac{1}{1+(-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o(x^4))}$. ここで, $\dfrac{1}{1+X} = 1-X+X^2+o(X^2)$ $(X\to 0)$ を用いて,

$$\frac{x}{\sin x} = 1-\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o(x^4)\right)+\left(-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^4) = \boxed{1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}+o(x^4)}.$$

(10) $\cos x = 1+\left(-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)\right)$ $(x\to 0)$, $e^{1+X}=e\cdot e^X = e\left(1+X+\dfrac{X^2}{2}+o(X^2)\right)$ $(X\to 0)$ より,

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e\left\{1+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2+o(x^4)\right\} \\ &= e\left\{1+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\right\}+o(x^4) = \boxed{e-\frac{e}{2}x^2+\frac{e}{6}x^4+o(x^4)}. \end{aligned}$$

(11) (c) より, $\log(1\pm x) = \pm x-\dfrac{x^2}{2}\pm\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}\pm\dfrac{x^5}{5}+o(x^5)$ (複号同順) であるから,

$$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\{\log(1+x)-\log(1-x)\} = \boxed{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)}.$$

あるいは積分表示 ($\left(\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)' = \frac{1}{1-x^2}$ を確認せよ) を用いて,

$$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \int_0^x\frac{dt}{1-t^2} = \int_0^x\left(1+t^2+t^4+o(t^4)\right)dt = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5).$$

(12) $\mathrm{Tan}^{-1}\,x = \displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x\left(1-t^2+t^4+o(t^4)\right)dt = \boxed{x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)}$.

【注意】 $\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \mathrm{Tanh}^{-1}\,x = x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^7}{7}+o(x^7)$, ← $\tanh x$ の逆関数

$$\mathrm{Tan}^{-1}\,x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+o(x^7).$$

(13) (1) の結果から, $\dfrac{1}{\sqrt{1\pm t^2}} = (1\pm t^2)^{-1/2} = 1\mp\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{3}{8}t^4+o(t^4)$ (複号同順). これを用いて,

$$\log(x+\sqrt{1+x^2}\,) = \int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^x\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{3t^4}{8}+o(t^4)\right)dt = \boxed{x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^5)}.$$

(14) (13) と同様にして,

$$\mathrm{Sin}^{-1}\,x = \int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x\left(1+\frac{t^2}{2}+\frac{3t^4}{8}+o(t^4)\right)dt = \boxed{x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+o(x^5)}.$$

【注意】 $\log(x+\sqrt{1+x^2}\,) = \mathrm{Sinh}^{-1}\,x = x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{3x^5}{40}-\dfrac{5x^7}{112}+o(x^7)$, ← $\sinh x$ の逆関数

$$\mathrm{Sin}^{-1}\,x = x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+o(x^7).$$

2 (1) (i) 分母が x^3 であるから, 分子を $o(x^3)$ を用いて表す.

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= e^{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)} = 1+\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}(x+o(x^2))^2+\frac{1}{6}(x+o(x))^3+o(x^3) \\ &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3) \end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3} = \frac{(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3))-(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3))}{x^3} = \frac{1}{6}+o(1)\to\boxed{\frac{1}{6}}\quad(x\to 0).$$

あるいは, $\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x^3} = e^{\sin x}\cdot\dfrac{e^{x-\sin x}-1}{x-\sin x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ と変形して,

$$\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{x-(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3))}{x^3} = \frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3}\to\frac{1}{6}\quad(x\to 0)$$

を用いればよい.

(ii) 分母は $x(x-\sin x) = \frac{1}{6}x^4+o(x^4)$ となるから, 分子に対する 4 次の漸近展開を計算すればよい:

$$\begin{aligned} e^{-2x^2}-\cos 2x &= \left(1+(-2x^2)+\frac{1}{2}(-2x^2)^2+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{24}(2x)^4+o(x^4)\right) \\ &= \left(1-2x^2+2x^4+o(x^4)\right)-\left(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^3)\right) = \frac{4}{3}x^4+o(x^4). \end{aligned}$$

よって,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-\cos 2x}{x(x-\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{3}x^4+o(x^4)}{\frac{1}{6}x^4+o(x^4))}=\lim_{x\to 0}\frac{8+o(1)}{1+o(1)}=\boxed{8}.$$

(iii) 対数をとって考える. $\log\left(\dfrac{x}{\tanh x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\log\frac{x}{\tanh x}}{x^2}$ において, 分母が x^2 だから, 分子を $o(x^2)$ で表す.

$$\frac{x}{\tanh x}=\frac{x\cosh x}{\sinh x}=\frac{x(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))}{x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}=\frac{1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{1+\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}$$

$$=\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)=1+\frac{x^2}{3}+o(x^2),$$

$$\log\frac{x}{\tanh x}=\log\left(1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)=\left(\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)+o(x^2)=\frac{x^2}{3}+o(x^2).$$

よって, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{x}{\tanh x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\log\frac{x}{\tanh x}}{x^2}=\frac{1}{3}$ となり, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tanh x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\boxed{e^{1/3}}.$

(2) $\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{\log(1+x)}{x}=1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)$ であるから, $(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\log(1+x)^{\frac{1}{x}}}=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}=$ $e\cdot e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}=e\left\{1+\left(-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x}{2}\right)^2+o(x^2)\right\}=e-\dfrac{e}{2}x+\dfrac{11e}{24}x^2+o(x^2)$. 故に, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=$ $\boxed{e-\dfrac{e}{2n}+\dfrac{11e}{24n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$ $(n\to\infty)$. 《補足》同様にして, $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}=e+\dfrac{e}{2n}+\dfrac{11e}{24n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ $(n\to\infty)$.

3 (1) (不定積分に対する積分定数は省略した.)

(i) 被積分関数を部分分数分解して,

$$\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\boxed{\log|x|-\frac{1}{2}\log(x^2+1)}=\boxed{\frac{1}{2}\log\frac{x^2}{x^2+1}}.$$

(ii) 部分積分法により,

$$\int(\log x)^2\,dx=x(\log x)^2-\int x\cdot\frac{2\log x}{x}\,dx=x(\log x)^2-2\int\log x\,dx$$

$$=x(\log x)^2-2x(\log x-1)=\boxed{x\left\{(\log x)^2-2\log x+2\right\}}.$$

(iii) $x^2=t$ とおけば $x\,dx=\dfrac{dt}{2}$ であるから,

$$\int x^3e^{-x^2}\,dx=\int te^{-t}\,\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\left(-te^{-t}+\int e^{-t}\,dt\right)=-\frac{1}{2}(t+1)e^{-t}=\boxed{-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}}.$$

(iv) $\cos x=t$ とおけば $-\sin x\,dx=dt$ であるから,

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx=\int\frac{-dt}{1-t^2}=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right|=\boxed{\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\boxed{\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|}.$$

(v) 部分積分法により,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx=\Big[x^2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\frac{\pi^2}{4}+2\Big[x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\boxed{\frac{\pi^2}{4}-2}.$$

(vi) 部分積分法により, $I:=\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-x}\sin x\,dx=\Big[-e^{-x}\sin x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^{-x}\cos x\,dx=\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^{\pi}-$ $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-x}\sin x\,dx=e^{-\pi}+1-I.$ よって, $I=\boxed{\dfrac{1+e^{-\pi}}{2}}.$

(vii) $$\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|\,dx=\int_0^{\pi}\left|\sqrt{2}\,\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx=\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin x|\,dx$$

$$=\sqrt{2}\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin x\,dx+\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}(-\sin x)\,dx\right)=\sqrt{2}\left(\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}+\Big[\cos x\Big]_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)\right\}=\boxed{2\sqrt{2}}.$$

《別法》 $|\sin x|$ は周期 π の関数であるから, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2.$

(viii) $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx$ とおく $(m, n \in \mathbb{N}_0)$. $m \neq n$ のとき, 三角関数の積和の公式により,

$$I_{m,n} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}\, dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\Big]_0^{\pi} = \boxed{0}.$$

$m = n \geqslant 1$ のとき, $I_{n,n} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2nx)\, dx = \frac{1}{2}\Big[x + \frac{\sin 2nx}{2n}\Big]_0^{\pi} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

$m = n = 0$ のとき, $I_{0,0} = \displaystyle\int_0^{\pi} dx = \boxed{\pi}$.

(2) (i) $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ とおけば, $\displaystyle\frac{1}{x-1}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(t)\, dt = \frac{F(x^2) - F(\sqrt{x})}{x-1}$ ($x \to 1$ のとき $\frac{0}{0}$ 型の不定形) であるから, ロピタルの定理 (あるいは微分の定義) により,

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(t)\, dt = \lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(\sqrt{x})}{x-1} = \lim_{x\to1}\left\{2xF'(x^2) - \frac{F'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\right\} = \boxed{\frac{3}{2}f(1)}.$$

(ii) 連続関数 $h(x)$, 定数 c に対し, $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_c^x h(t)\, dt = h(x)$ (微積分の基本定理) が成り立つことに注意する.

$$\begin{aligned}
G(x) &= x^2\int_0^x f(t)\, dt - 2x\int_0^x tf(t)\, dt + \int_0^x t^2 f(t)\, dt,\\
G'(x) &= 2x\int_0^x f(t)\, dt + x^2\cdot f(x) - 2\int_0^x tf(t)\, dt - 2x\cdot xf(x) + x^2 f(x)\\
&= 2\left(x\int_0^x f(t)\, dt - \int_0^x tf(t)\, dt\right),\\
G''(x) &= 2\left(\int_0^x f(t)\, dt + x\cdot f(x) - xf(x)\right) = 2\int_0^x f(t)\, dt.
\end{aligned}$$

よって, $G'''(x) = \boxed{2f(x)}$.

《補足》一般に, 自然数 n に対して, $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt$ とおけば, ${F_n}^{(n)}(x) = f(x)$ が成り立つ.

2 レポート問題

[1] (i) $\displaystyle \mathrm{Cos}^{-1}\, x = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} - \int_0^x\Big(1 + \frac{t^2}{2} + o(t^3)\Big)\, dt = \boxed{\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)} \quad (x \to 0).$

(ii) $$\sqrt{\cos x} = \Big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\Big)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\Big) - \frac{1}{8}\Big(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\Big)^2 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o(x^4)$$ であるから,

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\cos x}}{1+x} &= \Big(1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o(x^4)\Big)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4))\\
&= \boxed{1 - x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{71}{96}x^4 + o(x^4)} \quad (x \to 0).
\end{aligned}$$

[2] 分母は $x(1-\cos x) = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$ となるから, 分子に対する 3 次の漸近展開を計算すればよい:

$$\begin{aligned}
2x\sqrt[3]{1+3x} + \log(1-2x) &= 2x\Big\{1 + \frac{1}{3}\cdot 3x - \frac{1}{9}(3x)^2 + o(x^2)\Big\} + \Big\{(-2x) - \frac{1}{2}(-2x)^2 + \frac{1}{3}(-2x)^3 + o(x^3)\Big\}\\
&= \big(2x + 2x^2 - 2x^3 + o(x^3)\big) + \Big(-2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\Big) = -\frac{14}{3}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

よって,

$$\lim_{x\to0}\frac{2x\sqrt[3]{1+3x} + \log(1-2x)}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to0}\frac{-\frac{14}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3))} = \lim_{x\to0}\frac{-\frac{14}{3} + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} = \boxed{-\frac{28}{3}}.$$

[3] 積和の公式を用いて, $\cos x\sin 2x\cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)\cos 3x = \frac{1}{4}\{\sin 6x + (\sin 4x - \sin 2x)\}$. よって,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin 2x\cos 3x\, dx = \frac{1}{4}\Big[-\frac{\cos 6x}{6} - \frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{-\frac{1}{6}}.$$

《別法》 倍角の公式, 3 倍角の公式を用いて,

$$\cos x\sin 2x\cos 3x = \cos x\cdot 2\sin x\cos x\cdot(4\cos^3 x - 3\cos x) = (8\cos^5 x - 6\cos^3 x)\sin x.$$

よって, $\cos x = u$ で置換して,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin 2x\cos 3x\, dx = \int_0^1 (8u^5 - 6u^3)\, du = \Big[\frac{4}{3}u^6 - \frac{3}{2}u^4\Big]_0^1 = \boxed{-\frac{1}{6}}.$$