

数学演習第一（演習第 10 回）【解答例】

線形：4 次以上の行列式 2024 年 7 月 10 日

1 演習問題

1

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 96.$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 12 & 13 & 1 & 5 \\ 11 & 16 & -1 & 6 \\ 10 & 9 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 11 & 11 & 0 & 1 \\ 12 & 18 & 0 & 10 \\ 11 & 11 & 0 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 11 & 1 \\ 12 & 18 & 10 \\ 11 & 11 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & 11 & 1 \\ 12 & 18 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 11 & 11 \\ 12 & 18 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 11 & 0 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 660.$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 32 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 32 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -128.$$

$$(4) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ -5 & 11 & -9 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ -5 & 11 & -9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ -5 & 11 & -4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 21 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -42.$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -21 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -21 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 & -2 \\ -21 & 1 & -5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -20 & -26 & 70 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ -10 & -13 & 35 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 35 & -13 & -10 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \\ 35 & -13 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$-2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 92 & -150 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 46 & -75 \end{vmatrix} = -20 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 46 & -15 \end{vmatrix} = -20.$$

2

$$(1) |dE| = d^n |E| = d^n.$$

(2) $A\tilde{A} = |A|E \cdots (*)$ の両辺の行列式をとって $|A\tilde{A}| = ||A|E|$. 行列の積の行列式は行列式の積になるから, 左辺 $= |A||\tilde{A}|$. また, (1) より, 右辺 $= |A|^n$. よって, $|A||\tilde{A}| = |A|^n \cdots (**)$. 以下, $|A| \neq 0$, $|A| = 0$ の場合に分けて考える. $|A| \neq 0$ のときには, $(**)$ の両辺を $|A|$ で割って,

$|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$ を得る. 次に, $|A| = 0$ のときを考える. このとき, (*) より $A\tilde{A} = O$ である. ここで, $\tilde{A}$ が正則であると仮定する. $A\tilde{A} = O$ の両辺に右から $\tilde{A}^{-1}$ を掛けると $A = O$ となり, よって $\tilde{A} = O$ となるが, これは $\tilde{A}$ が正則であることに矛盾する. よって, $\tilde{A}$ は正則でない, すなわち, $|\tilde{A}| = 0$ が成り立つ. 以上より, $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$ が成り立つ (両辺ともに 0 となる).

- (3) $\boxed{1}$ の (4) の行列を A , A の余因子行列を $\tilde{A}$ とする. $|\tilde{A}| = |A|^{4-1} = (-42)^3 = -74088$. $\boxed{1}$ の (5) の行列を B , B の余因子行列を $\tilde{B}$ とする. $|\tilde{B}| = |B|^{5-1} = (-20)^4 = 160000$.

3

$$(1) \begin{vmatrix} b \\ c \\ d \\ a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c \\ b \\ d \\ a \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} d \\ b \\ c \\ a \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} = 2.$$

$$(2) \begin{vmatrix} b \\ -d \\ 3a \\ -2c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3a \\ -d \\ b \\ -2c \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3a \\ b \\ -d \\ -2c \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3a \\ b \\ -2c \\ -d \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot (-1) \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} = 12.$$

$$(3) \begin{vmatrix} 10b \\ a+b \\ a-b \\ c+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10b \\ a+b \\ -2b \\ c+d \end{vmatrix} = 10 \cdot (-2) \begin{vmatrix} b \\ a+b \\ b \\ c+d \end{vmatrix} = 10 \cdot (-2) \left(\begin{vmatrix} b \\ a \\ b \\ c+d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b \\ a \\ b \\ c \end{vmatrix} \right) = 0.$$

$$(4) \begin{vmatrix} 2a \\ -3b \\ -5b+4c \\ 7a-d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a \\ -3b \\ 4c \\ 7b-d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a \\ -3b \\ 4c \\ -d \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-1) \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} = -48.$$

4

- (1) $Ax = b$ を満たす x がただ一つ存在するので, 以下この表現を求める. A の第 i 列を a_i とする. このとき, $b = Ax = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$ なので,

$$\begin{aligned} |A_i| &= \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & b & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & (x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n) & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\ &= x_1 \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + \cdots + x_i \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\ &\quad + \cdots + x_n \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\ &= x_i |A| \end{aligned}$$

となる. よって, $x_i = |A_i|/|A|$.

- (2) (i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ とすると, $|A| = 37$ となる. クラメールの公式より,

$$x_1 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{37}, \quad x_2 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{11}{37}, \quad x_3 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{10}{37}.$$

- (ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ とすると, $|B| = 55$ となる. クラメールの公式より,

$$x_1 = \frac{1}{|B|} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{65}{55}, \quad x_2 = \frac{1}{|B|} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{57}{55}, \quad x_3 = \frac{1}{|B|} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{7}{55}.$$

5

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_2x_1 & x_3^2 - x_3x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_2^2 - x_2x_1 & x_3^2 - x_3x_1 \end{vmatrix} = (x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \\ x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1).$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_2x_1 & x_3^2 - x_3x_1 & x_4^2 - x_4x_1 \\ 0 & x_2^3 - x_2^2x_1 & x_3^3 - x_3^2x_1 & x_4^3 - x_4^2x_1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_2^2 - x_2x_1 & x_3^2 - x_3x_1 & x_4^2 - x_4x_1 \\ x_2^3 - x_2^2x_1 & x_3^3 - x_3^2x_1 & x_4^3 - x_4^2x_1 \end{vmatrix} = (x_4 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$(1) \text{ の結果より, } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} = (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_3 - x_2) \text{ なので,}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1).$$

6

$$(1) |A_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad |A_{21}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad |A_{31}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \\ |A_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \\ |A_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\text{なので, } \tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \text{ また, } |A| = 2 \text{ なので, } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(2) 求める行列式は x の多項式となるので $f_n(x)$ とおく. 第 1 行に関して余因子展開し, $f_n(x) = (x^2 + 1)f_{n-1}(x) - x^2f_{n-2}(x)$ を得る. $f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = (x^2 + 1)^2 - x^2 = x^4 + x^2 + 1$ より, $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^{2k}$ であると予想される. これを数学的帰納法により示そう. $n \leq 2$ のとき, 確かに成り立つ. $n \geq 3$ のとき, $f_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k}$, $f_{n-2}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k}$ であるとすれば (帰納法の仮定),

$$f_n(x) = (x^2 + 1)f_{n-1}(x) - x^2f_{n-2}(x) = (x^2 + 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} - x^2 \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k} \\ = \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} + x^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k} = \sum_{k=0}^n x^{2k}$$

より n のときも確かに成り立つ. 故に, $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^{2k} = x^{2n} + x^{2(n-1)} + \cdots + x^2 + 1$.

2 レポート課題 (WebClass 提出用)

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -2 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 9 & -13 & -5 \\ 0 & -7 & 9 & 4 \\ 0 & 6 & -7 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 9 & -13 & -5 \\ -7 & 9 & 4 \\ 6 & -7 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 9 & -13 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 6 & -7 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 5 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -5. \text{ よって, } |A| = \boxed{-5},$$

$$|\tilde{A}| = (-5)^3 = \boxed{-125}.$$

$$(2) |B_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -10, \quad |B_{21}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad |B_{31}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$|B_{12}| = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 9, \quad |B_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4, \quad |B_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$|B_{13}| = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 3, \quad |B_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5, \quad |B_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\text{なので, } \tilde{B} = \begin{bmatrix} -10 & -2 & 1 \\ -9 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}. \text{ また, } |B| = -11 \text{ なので, } B^{-1} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -10 & -2 & 1 \\ -9 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5^{-1} & 3^{-1} & 2^{-1} \\ 5^{-2} & 3^{-2} & 2^{-2} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{150} \text{ なので,}$$

$$x_1 = 150 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7^{-1} & 3^{-1} & 2^{-1} \\ 7^{-2} & 3^{-2} & 2^{-2} \end{vmatrix} = 150 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) = \boxed{\frac{250}{147}},$$

$$x_2 = 150 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5^{-1} & 7^{-1} & 2^{-1} \\ 5^{-2} & 7^{-2} & 2^{-2} \end{vmatrix} = 150 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5}\right) = \boxed{-\frac{45}{49}},$$

$$x_3 = 150 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5^{-1} & 3^{-1} & 7^{-1} \\ 5^{-2} & 3^{-2} & 7^{-2} \end{vmatrix} = 150 \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \boxed{\frac{32}{147}}.$$