

数学演習第一 演習第 11 回

微積：積分の計算 (2)

2024 年 7 月 17 日 実施

要点

I. 基本的な不定積分. 以下, 積分定数 C は省略する.

$$(1) (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ なので, } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x.$$

$$(2) (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2} \text{ なので, } \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x.$$

$$(3) a > 0 \text{ かつ } a \neq 1 \text{ のとき, } (a^x)' = a^x \log a \Leftrightarrow \left(\frac{a^x}{\log a}\right)' = a^x \text{ なので, } \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}.$$

$$(4) a \neq 0 \text{ のとき, } \{\log|x + \sqrt{x^2 + a}|\}' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} \text{ より, } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \log|x + \sqrt{x^2 + a}|.$$

あるいは $\sqrt{x^2 + a} = t - x$ として置換積分する (1)(3)).

II. 有理式 $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ($p(x), q(x)$ は x の多項式) の積分. 部分分数分解してから積分する (微積教科書 p.62). 例えば,

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+1} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right\}$$

なので,

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \log|x+1| - \frac{1}{4} \log(x^2+1) + \frac{1}{2} \tan^{-1} x.$$

III. 無理関数を含む関数 $f(x)$ の積分. $f(x)$ が x と $\sqrt[n]{ax+b}$ ($a \neq 0$) の有理式のとき, $t = \sqrt[n]{ax+b}$ として置換積分する (微積教科書 p.63). 例えば,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} \stackrel{(t=\sqrt{1-x})}{=} \int \frac{-2t dt}{(1-t^2)t} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \log \left| \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1} \right|.$$

IV. 三角関数の有理式の積分. $u = \tan \frac{x}{2}$ として置換積分する. 例えば,

$$\int \frac{dx}{\sin x} \stackrel{(u=\tan \frac{x}{2})}{=} \int \frac{1+u^2}{2u} \frac{2du}{1+u^2} = \log|u| = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|.$$

【注】 $u = \tan \frac{x}{2}$ のとき, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2 du}{1+u^2}$.

次のような方法もある:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} \right) \sin x dx = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right).$$

ここで, $\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ だから, これは上の結果と一致している.

V. 定積分の計算 (微積教科書 p.57). $f(x)$ が $[a, b]$ で連続とする. $f(x)$ の $[a, b]$ における不定積分 (の 1 つ) を $F(x)$ とすると, $\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b$ となる.

1 演習問題

1 (一部は演習書 例題 4.1 問題 4.1.1)

次の不定積分を求めよ. ただし, $a > 0$, $A \neq 0$ (定数) とする.

$$(1) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \quad (2) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} \quad (3) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} \quad (4) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$(5) \int \sqrt{x^2 + A} dx \quad (6) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (7) \int \sin^{-1} x dx \quad (8) \int \tan^{-1} x dx$$

ヒント: (5) は $\sqrt{x^2 + A} = (x\sqrt{x^2 + A})' - x(\sqrt{x^2 + A})'$ を用いて部分積分する.

2 次の有理関数の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \frac{x-3}{x^2-3x+2} dx \quad (2) \int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} dx \quad (3) \int \frac{dx}{x^4-16}$$

$$(4) \int \frac{3x^3+x}{x^2+3} dx \quad (5) \int \frac{x^2+2}{x^4+4} dx \quad (6) \int \frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2} dx$$

ヒント: (2) は $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$ の形で表す.

3 (一部は演習書 問題 4.3.1) 次の無理関数の不定積分を求めよ. ただし, $a > 0$ とする.

$$(1) \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx \quad (2) \int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx \quad (3) \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

ヒント: (3) は $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ として置換積分する.

4 次の三角関数の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx \quad (2) \int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (3) \int \frac{dx}{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}$$

ヒント: (3) は $u = \tan x$ として置換積分する.

5 次の定積分の値を求めよ.

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{1+x+\sqrt{1-x}} \quad (2) \int_0^{1/2} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (3) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+5 \sin x}$$

6 (一部は演習書 問題 4.4.11) 以下の問いに答えよ.

(1) $p > 0$ に対して広義積分 $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x)^p}$ の収束・発散を調べよ.

(2) 円板 $(x-a)^2 + y^2 \leq b^2$ ($a > b > 0$) を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

(3) 曲線: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ の長さ L を求めよ.

2 レポート問題 (WebClass へ提出)

1 次の不定積分を求めよ. (積分定数は省略してよい.)

(1) $\int \log(1 + \sqrt{x}) dx$

(2) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(3) $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$

2 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x} dx$

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{3x^4 + 10x^2 + 3}$

(3) $\int_{\sqrt{3}/2}^1 \cos^{-1} x dx$