数学演習第一・中間統一試験【解説】

2024 年 6 月 12 日実施 ・ 試験時間 90 分

1 逆三角関数 (および双曲線関数) について, 次の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Cos}^{-1}\left(\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)$ の値を求めよ.

【答】 $\sin\dfrac{4\pi}{5} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(-\dfrac{3\pi}{10}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{10}$, $\dfrac{3\pi}{10} \in [0, \pi]$ より, $\mathrm{Cos}^{-1}\left(\sin\dfrac{4\pi}{5}\right) = \boxed{\dfrac{3\pi}{10}}$.

(2) 方程式 $\mathrm{Sin}^{-1}\,x + \mathrm{Tan}^{-1}\,\dfrac{4}{3} = \dfrac{\pi}{4}$ を解け.

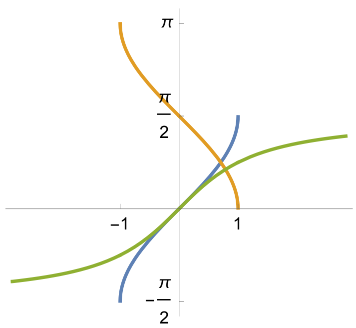
【答】 $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\,\dfrac{4}{3}$ とおけば, $\tan\alpha = \dfrac{4}{3} > 0$ であり, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. このとき, $\mathrm{Sin}^{-1}\,x = \dfrac{\pi}{4} - \alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから, 解 x は確かに存在し, $x = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha - \sin\alpha)$ で与えられる. ここで,

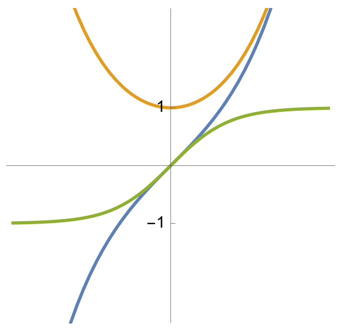
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{4}{3})^2}} = \frac{3}{5}, \quad \sin\alpha = \cos\alpha\tan\alpha = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{5}$$

であるから, $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}\right) = \boxed{-\dfrac{1}{5\sqrt{2}}}$.

(3) 6 つの関数 $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\,x,\ \mathrm{Cos}^{-1}\,x,\ \mathrm{Tan}^{-1}\,x,\ \sinh x,\ \cosh x,\ \tanh x$ のうちで, グラフ $y = f(x)$ が直線 $y = x$ と接しないような関数をすべて解答欄に書け.

【答】 4 つの関数 $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\,x, \mathrm{Tan}^{-1}\,x, \sinh x, \tanh x$ については, どれも $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ を満たすので, グラフ $y = f(x)$ が原点で直線 $y = x$ と接する. $y = \mathrm{Cos}^{-1}\,x$ は $y = x$ と 1 つの共有点をもつが, 増加・減少が異なるので, 接し得ない. $y = \cosh x$ は $y = x$ と共有点すらもたない. よって, $\boxed{\mathrm{Cos}^{-1}\,x,\ \cosh x}$ が条件を満たす関数である. (このような基本的な関数についてはグラフの概形が頭に浮かぶようにしておくべきである.)





2 次の極限値を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^2\sin x}$

【答】 ロピタルの定理を用いて (ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で表した),

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\right) \overset{\star}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

2 つ目の等号の後は $\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \dfrac{1}{1+\cos x}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ と変形してもよい.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x - 1}{x - \log(1+x)}$

【答】 $y=(1+x)^x$ とおけば, $\log y = x\log(1+x)$ より,

$$\frac{y'}{y}=\log(1+x)+\frac{x}{1+x}. \qquad \therefore\ y'=(1+x)^x\left\{\log(1+x)+\frac{x}{1+x}\right\}.$$

ロピタルの定理を用いて,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-1}{x-\log(1+x)} \overset{\star}{=} \frac{(1+x)^x\{\log(1+x)+\frac{x}{1+x}\}}{1-\frac{1}{1+x}} = \left(\lim_{x\to 0}(1+x)^x\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\log(1+x)+x}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{(1+x)\frac{\log(1+x)}{x}+1\right\}=\boxed{2}.$$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

【答】 対数をとって考える.

$$\lim_{x\to\infty}\log\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(2^x+3^x)-\log 2}{x}$$
$$\overset{\star}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2^x\log 2+3^x\log 3}{2^x+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{2}{3})^x\log 2+\log 3}{(\frac{2}{3})^x+1}=\log 3.$$

よって, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\log 3}=\boxed{3}.$

3 関数の導関数, 微分係数について, 次の問いに答えよ.

(7) 関数 $f(x)=\log(\sqrt{x^2+1}-x)$ の導関数 $f'(x)$ を (整理された形で) 求めよ.

【答】 $\displaystyle f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{(\sqrt{x^2+1}-x)\sqrt{x^2+1}}=\boxed{-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}.$

(8) 関数 $g(x)=\mathrm{Tan}^{-1}(\sinh x)$ に対して, $g'(\log 2)$ を求めよ.

【答】 $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ に注意して,

$$g'(x)=\frac{(\sinh x)'}{1+(\sinh x)^2}=\frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x}=\frac{\cosh x}{\cosh^2 x}=\frac{1}{\cosh x}.$$

これより, $\displaystyle g'(\log 2)=\frac{1}{\cosh(\log 2)}=\frac{2}{e^{\log 2}+e^{-\log 2}}=\frac{2}{2+\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{4}{5}}.$

(9) 関数 $\displaystyle y=\frac{1}{\sin^2 x}\ \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right)$ の逆関数 $x=\varphi(y)$ に対して, $\varphi'\left(\frac{4}{3}\right)$ を求めよ.

【答】 まず, $\displaystyle\varphi'(y)=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}}=-\frac{\sin^3 x}{2\cos x}$. 次に, $y=\frac{4}{3}$ に対応する x の値は

$$\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{4}{3}\ \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right)\ \text{より}\ \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{であり,}\ x=\frac{2\pi}{3}.$$

よって, $\displaystyle\varphi'\left(\frac{4}{3}\right)=\left(-\frac{\sin^3 x}{2\cos x}\right)_{x=\frac{2\pi}{3}}=\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{8}}.$

［別法］ 逆関数 $x=\varphi(y)$ の具体形を求め, それを用いて $\varphi'\left(\frac{4}{3}\right)$ を計算する. まず,

$$\sin^2 x=\sin^2(\pi-x)=\frac{1}{y}\ \left(0<\pi-x<\frac{\pi}{2}\right)\ \text{より,}\ \ \pi-x=\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{\sqrt{y}}\ \ (y>0)$$

であるから, $\displaystyle\varphi(y)=\pi-\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{\sqrt{y}}\ (y>0)$. よって,

$$\varphi'(y)=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{y}}}\cdot\frac{-1}{2y\sqrt{y}}=\frac{1}{2y\sqrt{y-1}}. \qquad \therefore\ \varphi'\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2\cdot\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}}=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

4 (10) 関数 $h(x) = \dfrac{\sqrt{|x|}}{x+1}$ の極値を求めよ．ただし，すべての極値 b に対して「$x=a$ で極大値 (or 極小値) b」という形で答えよ．

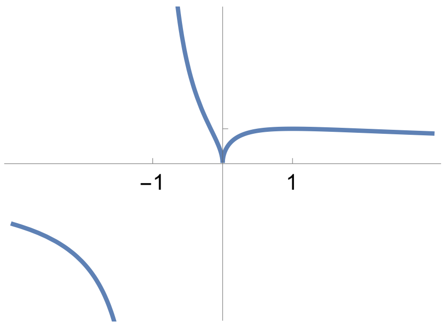
【答】 $h(x)$ は $x \neq -1$ において連続，$x \neq -1, 0$ において微分可能で，導関数は次で与えられる:

- $x > 0$ のとき，$h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(x+1)} - \dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)-2x}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2} = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2}$,
- $x < 0$ のとき，$h'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}\,(x+1)} - \dfrac{\sqrt{-x}}{(x+1)^2} = \dfrac{-(x+1)+2x}{2\sqrt{-x}\,(x+1)^2} = \dfrac{x-1}{2\sqrt{-x}\,(x+1)^2}$.

これより，$h(x)$ の増減は次の通り:

x	$-\infty$	$\cdots$	$-1-0$	$-1+0$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$h'(x)$		$-$			$-$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0

よって，$h(x)$ は $\boxed{x=0 \text{ で極小値 } 0}$, $\boxed{x=1 \text{ で極大値 } 1/2}$ をとる．



5 空間内の 3 点 $\mathrm{P}(1, -2, 1)$, $\mathrm{Q}(-1, 1, 0)$, $\mathrm{R}(2, -3, 1)$ について，次の問いに答えよ．

(11) 三角形 PQR の面積を求めよ．

【答】 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ を用いて，

$$(\text{三角形 PQR の面積}) = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{PR}} \text{ の作る平行四辺形の面積}) = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}}\| = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

(12) 点 R を通り，直線 PQ と垂直に交わる直線の方程式を求めよ．

【答】 $\overrightarrow{n} := \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \times \overrightarrow{\mathrm{PR}}$ は平面 PQR の法線ベクトルであるから，求める直線は $\overrightarrow{n}, \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の両方と垂直である．よって，$\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ が方向ベクトルであり，方程式は $\boxed{\dfrac{x-2}{4} = y+3 = \dfrac{z-1}{-5}}$.

［別法］ 点 R から直線 PQ に垂線 RS を下ろす．S は直線 PQ 上の点であるから $\mathrm{S}(1-2t,\ -2+3t,\ 1-t)$ とおける．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{RS}}$ であるから，

$$0 = \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RS}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (1-2t)-2 \\ (-2+3t)+3 \\ (1-t)-1 \end{bmatrix} = -2(-2t-1) + 3(3t+1) - (-t) = 14t + 5.$$

よって，$t = -\dfrac{5}{14}$ と定まり，$\mathrm{S}\left(\dfrac{24}{14}, -\dfrac{43}{14}, \dfrac{19}{14}\right)$. これより，$\overrightarrow{\mathrm{RS}} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{14} \\ -\frac{1}{14} \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix} \,/\!/\, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ が求める直線の方向ベクトルである．

6 行列 $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ および $M=\begin{bmatrix}A & B\end{bmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(13) ${}^{\mathrm{t}}MM$ の第 3 行の行ベクトルを求めよ.

【答】 ${}^{\mathrm{t}}MM=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 3\\ 1 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -2\\ -2 & 3 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -8 & -1 & 0\\ -8 & 13 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -3 & 5\end{bmatrix}$ より, ${}^{\mathrm{t}}MM$ の第 3 行の行ベクトルは $\boxed{\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2 & -3\end{bmatrix}}$.

(14) $AXA=B$ を満たす行列 X を求めよ.

【答】 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ より,

$$X=A^{-1}BA^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}A^{-1}=\begin{bmatrix}-5 & 8\\ -3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & -2\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}}.$$

7 4つのベクトル $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}3\\2\\1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\4\\k\end{bmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(15) $\boldsymbol{b}=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3$ を満たす実数 c_1, c_2, c_3 が存在するための k の条件を求めよ. (ヒント：c_1, c_2, c_3 を変数とする連立１次方程式と考えよ.)

【答】 $\boldsymbol{b}=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3$ は c_1, c_2, c_3 を変数とする連立１次方程式 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{b}$ と見なせる. 拡大係数行列を簡約化して,

$$\left[\begin{array}{ccc|c}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 0 & k\end{array}\right]\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -4 & -5 & 2\\ 0 & -1 & -9 & k-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 6\\ 0 & 0 & -7 & k-2\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -7 & k-2\end{bmatrix}\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & k+12\end{array}\right].$$

よって, (c_1, c_2, c_3) が存在するための k の条件は $\boxed{k=-12}$.

(16) k が (15) の条件を満たすとき, $\boldsymbol{b}=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3$ を満たす (c_1, c_2, c_3) の組を求めよ.

【答】 $k=-12$ のとき, $\left[\begin{array}{ccc|c}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$ であるから, $(c_1, c_2, c_3)=\boxed{(-2, -3, 2)}$.

8 連立 1 次方程式に関する以下の問いに答えよ. ただし, (18), (20) において解が任意定数を含む場合は, 任意定数の選び方は標準的な方法, すなわち線形代数の教科書に書かれている方法 (= 演習の解答例の方法) に従え. また, 任意定数の文字は s, t, ... をこの順に用いよ.

(17) 連立１次方程式 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+4x_4=0\\ 2x_1+2x_2+2x_3+3x_4=6\\ x_1-2x_2+7x_3-3x_4=6\\ 5x_2-10x_3+7x_4=-4\end{cases}$ の拡大係数行列の階数を求めよ.

【答】 拡大係数行列を行基本変形して,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 7 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -10 & 7 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[③-①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & -4 & 8 & -7 & 6 \\ 0 & 5 & -10 & 7 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③-2\times② \\ ④+2\times②}]{①+②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\leftrightarrow④} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\times③]{④+2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{②+2\times③ \\ ④+3\times③}]{①-③} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

よって, 拡大係数行列の階数は $\boxed{3}$.

(18) (17) の同次連立 1 次方程式を解け.

【答】 (17) の結果より, (17) の同次連立 1 次方程式は $\begin{cases} x_1 \quad + 3x_3 = 4 \\ \quad x_2 - 2x_3 = 2 \\ \qquad\qquad x_4 = -2 \end{cases}$ と同値となる. ここで, “主成分に対応しない変数” x_3 を任意定数にとり, $x_3 = s$ とおいて, 解は

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 4 - 3s \\ x_2 = 2 + 2s \\ x_3 = s \\ x_4 = -2 \end{cases}} \quad \text{あるいは} \quad \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad (s \text{ は任意定数})$$

で与えられる (どちらか一方の形で答えればよい).

(19) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = b \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3 \\ 2x_1 + ax_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$ (a, b は定数) が無数の解をもつような (a, b) の組をすべて求めよ.

【答】 説明の便宜のために与えられた連立 1 次方程式を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ と表す. 拡大係数行列 $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$ に行基本変形を施し,

$$\begin{bmatrix} A \mid \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 2 & a & 3 \\ 2 & a & 4 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[③-2\times①]{②-①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & a-1 & 3-b \\ 0 & a-2 & 2 & 2-2b \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-(a-2)\times②} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & a-1 & 3-b \\ 0 & 0 & a(3-a) & 2-2b-(a-2)(3-b) \end{array}\right].$$

よって, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ について,

- $a \neq 0, 3$ のとき, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = 3$ であるから, ただ 1 つの解が存在する.
- $a = 0$ のとき, $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & 3-b \\ 0 & 0 & 0 & 8-4b \end{bmatrix}$ であるから, $b = 2$ なら無数の解が存在し, $b \neq 2$ なら解は存在しない.
- $a = 3$ のとき, $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 2 & 3-b \\ 0 & 0 & 0 & -1-b \end{bmatrix}$ であるから, $b = -1$ なら無数の解が存在し, $b \neq -1$ なら解は存在しない.

故に, 求める (a, b) の組は $\boxed{(a, b) = (0, 2),\ (3, -1)}$.

(20) (19) で求めた (a, b) のうち $b < 0$ である組を選んで, (19) の連立 1 次方程式を解け.

【答】 $b < 0$ となる組は $(a, b) = (3, -1)$. このとき, 行基本変形により

$$\begin{bmatrix} A \mid \boldsymbol{c} \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

と簡約化されるから, (19) の連立 1 次方程式は $\begin{cases} x_1 - x_3 = -5 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ と同値となる．ここで, "主成分に対応しない変数" x_3 を任意定数にとり, $x_3 = s$ とおいて, 解は

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = -5 + s \\ x_2 = 4 - 2s \\ x_3 = s \end{cases}} \quad \text{あるいは} \quad \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad (s \text{ は任意定数})$$

で与えられる (どちらか一方の形で答えればよい).