

# 数学演習第一・中間統一試験【問題用紙】

2024年6月12日実施・試験時間90分

— 解答用紙には答えのみを整理された形で記入せよ —

**1** 逆三角関数について、次の問いに答えよ。

(1)  $\text{Cos}^{-1}\left(\sin \frac{4\pi}{5}\right)$  の値を求めよ。

(2) 方程式  $\text{Sin}^{-1} x + \text{Tan}^{-1} \frac{4}{3} = \frac{\pi}{4}$  を解け。

(3) 6つの関数  $f(x) = \text{Sin}^{-1} x, \text{Cos}^{-1} x, \text{Tan}^{-1} x, \sinh x, \cosh x, \tanh x$  のうちで、グラフ  $y = f(x)$  が直線  $y = x$  と接しないような関数をすべて解答欄に書け。

**2** 次の極限值を求めよ。

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x}$

(5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x - \log(1+x)}$

(6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2^x + 3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

**3** 関数の導関数、微分係数について、次の問いに答えよ。

(7) 関数  $f(x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} - x)$  の導関数  $f'(x)$  を(整理された形で)求めよ。

(8) 関数  $g(x) = \text{Tan}^{-1}(\sinh x)$  に対して、 $g'(\log 2)$  を求めよ。

(9) 関数  $y = \frac{1}{\sin^2 x}$  ( $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ) の逆関数  $x = \varphi(y)$  に対して、 $\varphi'\left(\frac{4}{3}\right)$  を求めよ。

**4** (10) 関数  $h(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x+1}$  の極値を求めよ。ただし、すべての極値  $b$  に対して「 $x = a$  で極大値 (or 極小値)  $b$ 」という形で答えよ。

**5** 空間内の3点  $P(1, -2, 1)$ ,  $Q(-1, 1, 0)$ ,  $R(2, -3, 1)$  について、次の問いに答えよ。

(11) 三角形  $PQR$  の面積を求めよ。

(12) 点  $R$  を通り、直線  $PQ$  と垂直に交わる直線の方程式を求めよ。

**6** 行列  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  および  $M = [A \ B]$  について、次の問いに答えよ。

(13)  ${}^tMM$  の第3行の行ベクトルを求めよ。

(14)  $AXA = B$  を満たす行列  $X$  を求めよ。

**7** 4つのベクトル  $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ k \end{bmatrix}$  について、次の問いに答えよ。

(15)  $\mathbf{b} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3$  を満たす実数  $c_1, c_2, c_3$  が存在するための  $k$  の条件を求めよ。(ヒント： $c_1, c_2, c_3$  を変数とする連立1次方程式と考えよ。)

(16)  $k$  が (15) の条件を満たすとき、 $\mathbf{b} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3$  を満たす  $(c_1, c_2, c_3)$  の組を求めよ。

**8** 連立1次方程式に関する以下の問いに答えよ。ただし、(18), (20)において解が任意定数を含む場合は、任意定数の選び方は標準的な方法、すなわち線形代数の教科書に書かれている方法 (= 演習の解答例の方法) に従え。また、任意定数の文字は  $s, t, \dots$  をこの順に用いよ。

(17) 連立1次方程式 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 6 \\ 5x_2 - 10x_3 + 7x_4 = -4 \end{cases}$$
 の拡大係数行列の階数を求めよ。

(18) (17) の連立1次方程式を解け。

(19) 連立1次方程式 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3 \\ 2x_1 + ax_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$
 ( $a, b$  は定数) が無数の解をもつような  $(a, b)$  の組をすべて求めよ。

(20) (19) で求めた  $(a, b)$  のうち  $b < 0$  である組を選んで、(19) の連立1次方程式を解け。