# 数学演習第一・期末統一試験【解説】

2024 年 7 月 24 日実施 ・ 試験時間 90 分

**1** $n$ を 1 以上の整数とするとき，次の問いに答えよ．ただし，十分整理した形で答えること．

(1) $f(x) = \log(1-3x)$ の $n$ 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

**【答】** $\bigl(\log t\bigr)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{t^n}$ より，$f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1-3x)^n}\cdot(-3)^n = \boxed{-\dfrac{(n-1)!\cdot 3^n}{(1-3x)^n}}$.

(2) $f(x) = e^x\cos x$ の $n$ 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とするとき，$f^{(10)}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ の値を求めよ．

**【答】** $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}e^x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,

$$f''(x) = \sqrt{2}e^x\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) = (\sqrt{2})^2e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\cdot 2\right).$$

これを繰り返すと， 一般に $f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x\cos\left(x+\dfrac{\pi n}{4}\right)$ となることがわかる．

よって，$f^{(10)}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2^5e^{\pi/6}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{5\pi}{2}\right) = \boxed{-16e^{\pi/6}}$.

**2** 次の関数 $f(x)$ について, $x=0$ における 3 次の漸近展開 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ $(x\to 0)$ の各次の係数を $\underline{(a_0, a_1, a_2, a_3)\text{ の形で}}$ 記せ．例えば，$f(x) = 1 - 2x^2 + x^3 + o(x^3)$ $(x\to 0)$ なら, $(1, 0, -2, 1)$ となる．

(3) $f(x) = \log\dfrac{1+x}{1+x^2}$

**【答】**
$$\log\frac{1+x}{1+x^2} = \log(1+x) - \log(1+x^2) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - \bigl(x^2 + o(x^3)\bigr)$$
$$= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

よって，$(a_0, a_1, a_2, a_3) = \boxed{\left(0,\ 1,\ -\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{3}\right)}$.

(4) $f(x) = e^{-x}\cos x$

**【答】** $f(x) = \left(1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)\left(1 - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) = 1 - x + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.

よって，$(a_0, a_1, a_2, a_3) = \boxed{\left(1,\ -1,\ 0,\ \dfrac{1}{3}\right)}$.

(5) $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}\bigl(\sqrt{1+x} - 1\bigr)$

**【答】**
$$\mathrm{Tan}^{-1}\,t = \int_0^t \frac{ds}{1+s^2} = \int_0^t \bigl(1 - s^2 + o(s^2)\bigr)ds = t - \frac{1}{3}t^3 + o(t^3),$$
$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 + o(x^3) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

より，
$$\mathrm{Tan}^{-1}\bigl(\sqrt{1+x}-1\bigr) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3)$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3 + o(x^3).$$

よって，$(a_0, a_1, a_2, a_3) = \boxed{\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{48}\right)}$.

$\boxed{3}$ (6) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cosh x}{x\sin x}-\frac{1}{x\sinh x}\right)$ を求めよ．

**【答】** $\displaystyle\frac{\cosh x}{x\sin x}-\frac{1}{x\sinh x}=\frac{\cosh x\sinh x-\sin x}{x\sin x\sinh x}=\frac{\frac{1}{2}\sinh 2x-\sin x}{x\sin x\sinh x}.$

分母は $x\sin x\sinh x=x^3+o(x^3)$ だから，分子の 3 次の漸近展開を考えると，

$$\frac{1}{2}\sinh 2x-\sin x=\frac{1}{2}\Big(2x+\frac{1}{6}(2x)^3+o(x^3)\Big)-\Big(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\Big)=\frac{5}{6}x^3+o(x^3).$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sinh 2x-\sin x}{x\sin x\sinh x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{6}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{6}+o(1)}{1+o(1)}=\boxed{\frac{5}{6}}.$

$\boxed{4}$ 次の定積分の値を求めよ．

(7) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$

**【答】** $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}=\Big[\mathrm{Sin}^{-1}\Big(\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)\Big]_0^1=\boxed{\frac{\pi}{4}}.$

(8) $\displaystyle\int_4^{12}\frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$

**【答】** $t=\sqrt{x-3}$ とおくと，$x=3+t^2$, $dx=2tdt$ だから，

$$\int_4^{12}\frac{dx}{x\sqrt{x-3}}=\int_1^3\frac{1}{(3+t^2)t}\cdot 2tdt=2\int_1^3\frac{1}{3+t^2}dt=2\Big[\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{\sqrt{3}}\Big]_1^3=\frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\Big)=\boxed{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}.$$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x+2\cos x}$

**【答】** $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$ より，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x+2\cos x}=\int_0^1\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=-2\int_0^1\frac{dt}{t^2-2t-3}=-2\int_0^1\frac{dt}{(t-3)(t+1)}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\Big(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+1}\Big)dt=-\frac{1}{2}\Big[\log\Big|\frac{t-3}{t+1}\Big|\Big]_0^1=\boxed{\frac{1}{2}\log 3}.$$

(10) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\big(\mathrm{Cos}^{-1}x\big)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

**【答】** $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{\big(\mathrm{Cos}^{-1}x\big)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\big(\mathrm{Cos}^{-1}x\big)^2\big(\mathrm{Cos}^{-1}x\big)'\,dx=-\Big[\frac{1}{3}\big(\mathrm{Cos}^{-1}x\big)^3\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$

$$=-\frac{1}{3}\Big(\Big(\frac{\pi}{3}\Big)^3-\Big(\frac{2\pi}{3}\Big)^3\Big)=\boxed{\frac{7}{81}\pi^3}.$$

$\boxed{5}$ (11) 4 点 A$(2,1,-1)$，B$(3,3,-2)$，C$(3,-2,4)$，D$(4,4,3)$ を頂点とする四面体の体積を求めよ．

**【答】** $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\quad\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&-3&3\\-1&5&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&-5&-1\\0&6&6\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}5&1\\1&1\end{vmatrix}=-24.$

よって四面体の体積は，$\dfrac{|-24|}{6}=\boxed{4}.$

**6** 次の行列に対して，<u>逆行列の第 3 行の行ベクトル</u>を求めよ

(12) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

**【答】** 行基本変形により，

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[③-①]{②-2\times①} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{②-③} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[③-4\times②]{①+2\times②} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & 5 \end{array}\right].$$

よって, 逆行列の第 3 行は $\boxed{\begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \end{bmatrix}}$.

(13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

**【答】** 行基本変形により，

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[③-3\times①]{②-①} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{④-2\times②} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{②+2\times③} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[③-④]{①-2\times④,②-④} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -9 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

よって, 逆行列の第 3 行は $\boxed{\begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}$.

**7** $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 11 & 1 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ とするとき，次の行列式の値を求めよ.

(14) $|A|$

**【答】** サラスの公式を使って直接計算してもよいし，次のように行基本変形と余因子展開を用いてもよい:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 11 & 6 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 11 & 6 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = \boxed{50}.$$

(15) $|{}^{t}AB^{-1}|$

**【答】** $|B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 11 & 1 \\ -2 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$ より，
$|{}^{t}AB^{-1}| = |{}^{t}A||B^{-1}| = |A||B|^{-1} = \boxed{10}$.

(16) $|2B|$

**【答】** $|2B| = 2^3|B| = \boxed{40}$.

(17) $|C|$

【答】 行基本変形により,

$$|C| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{-6}.$$

**8** 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ の余因子行列を $\widetilde{A}$ とするとき，次の問いに答えよ.

(18) $\widetilde{A}$ の第 3 行の行ベクトルを求めよ.

【答】 $\begin{bmatrix} |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}}.$

(19) $A\widetilde{A}$ を求めよ.

【答】 $A\widetilde{A} = |A|E$ だから，$|A|$ を求めればよい．$\widetilde{A}A = |A|E$ も成り立つから，$\widetilde{A}A$ の $(3,3)$ 成分が $|A|$ に一致する (これは $A$ の第 3 列に関する余因子展開に対応する)．よって (18) の結果より,

$$|A| = \begin{bmatrix} |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 3.$$

したがって，$A\widetilde{A} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}.$

**9** (20) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 4 \\ 5^2x_1 + 8^2x_2 + 9^2x_3 = 4^2 \end{cases}$ の解における $x_3$ の値を求めよ.

【答】 クラメルの公式とヴァンデルモンドの行列式により,

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 8 & 4 \\ 5^2 & 8^2 & 4^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \\ 5^2 & 8^2 & 9^2 \end{vmatrix}} = \frac{(4-8)(4-5)(8-5)}{(9-8)(9-5)(8-5)} = \boxed{1}.$$