

数学演習第一・期末統一試験【問題用紙】

2024年7月24日実施・試験時間90分

— 解答用紙には答えのみを整理された形で記入せよ —

1 n を1以上の整数とするとき、次の問いに答えよ。ただし、十分整理した形で答えること。

(1) $f(x) = \log(1 - 3x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ。

(2) $f(x) = e^x \cos x$ の n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とするとき、 $f^{(10)}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ の値を求めよ。

2 次の関数 $f(x)$ について、 $x = 0$ における3次の漸近展開 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ ($x \rightarrow 0$) の各次の係数を (a_0, a_1, a_2, a_3) の形で記せ。

例えば、 $f(x) = 1 - 2x^2 + x^3 + o(x^3)$ ($x \rightarrow 0$) なら、 $(1, 0, -2, 1)$ となる。

(3) $f(x) = \log \frac{1+x}{1+x^2}$

(4) $f(x) = e^{-x} \cos x$

(5) $f(x) = \text{Tan}^{-1}(\sqrt{1+x} - 1)$

3 (6) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cosh x}{x \sin x} - \frac{1}{x \sinh x} \right)$ を求めよ。

4 次の定積分の値を求めよ。

(7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$

(8) $\int_4^{12} \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + 2 \cos x}$

(10) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\text{Cos}^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

5 (11) 4点 $A(2, 1, -1)$, $B(3, 3, -2)$, $C(3, -2, 4)$, $D(4, 4, 3)$ を頂点とする四面体の体積を求めよ.

6 次の行列に対して、逆行列の第3行の行ベクトルを求めよ.

$$(12) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (13) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

7 $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 11 & 1 \\ -2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ とするとき、
次の行列式の値を求めよ.

$$(14) |A| \qquad (15) |{}^tAB^{-1}| \qquad (16) |2B| \qquad (17) |C|$$

8 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ の余因子行列を \tilde{A} とするとき、次の問いに答えよ.

(18) \tilde{A} の 第3行の行ベクトルを求めよ.

(19) $A\tilde{A}$ を求めよ.

9 (20) 連立1次方程式 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 4 \\ 5^2x_1 + 8^2x_2 + 9^2x_3 = 4^2 \end{cases}$ の解における x_3 の値を求めよ.