

数学演習第二 (演習第1回)

線形：前期線形の復習 (空間の直線と平面, 内積・外積を含む) 2024 年 10 月 2 日

要点 (内積・外積, 空間の直線と平面)

A 内積・外積 (線形 p.4, pp.7-8)

空間ベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対して,

- (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, $\|\mathbf{a}\| := \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ をそれぞれ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の **内積**, $\mathbf{a}$ の **長さ (大きさ, ノルム)** という. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ のとき, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を $\theta \in [0, \pi]$ とすれば, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$ が成り立つ. (平面ベクトルに対しても同様)

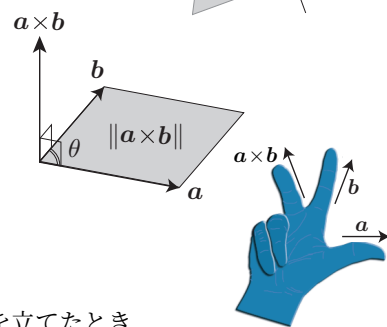
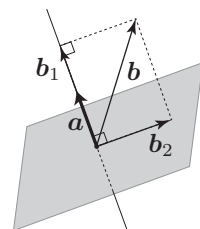
- (2) $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ のとき, $\mathbf{b}$ は $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ ($\mathbf{b}_1 = t\mathbf{a}$, $\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{a} = 0$) の形に一意に分解できる (実際, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a} = t \|\mathbf{a}\|^2$ より t が定まり, $\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$ となる). このとき, $\mathbf{b}_1$ を $\mathbf{b}$ の「 $\mathbf{a}$ に平行な直線」への**正射影** (または $\mathbf{a}$ への正射影), $\mathbf{b}_2$ を $\mathbf{b}$ の「 $\mathbf{a}$ に垂直な平面」への正射影と呼ぶ.

- (3) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$ を $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の **外積 (= ベクトル積)** と呼ぶ.

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ が平行でないとき, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を $\theta \in (0, \pi)$ とすれば,

- ① $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の両方と垂直, ② $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は**右手系**,
③ $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ が作る平行四辺形の面積}).$

なお, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が**右手系** (をなす) とは, 右手の親指, 人差し指, 中指の 3 本だけを立てたとき, 3 本の指が指す方向をこの順に $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の方向に合わせることができることをいう. 行列式を用れば, $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] > 0$ であることに他ならない.



B 面積・体積 (線形 p.6, p.8, pp.85-86)

- (1) 平面ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して,

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ の作る平行四辺形の面積 } S = |\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b}]| \quad (= \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}).$$

- (2) 空間ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ の作る平行四辺形の面積 } S &= \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \quad (= \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}), \\ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ の作る平行六面体の体積 } V &= |\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]| \quad (= |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|). \end{aligned}$$

C 空間内の直線と平面 (線形 pp.10-13)

空間の点 $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ とベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$ に対して,

- (1) 点 $\mathbf{x}_0$ を通り, $\mathbf{a}$ を**方向ベクトル**とする直線 ($\mathbf{a}$ に平行な直線) の方程式は,

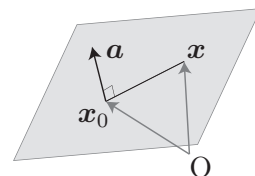
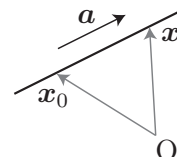
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{a} \quad \left(\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \right) \text{ より, } \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

(ベクトル方程式) (右の表現は $abc \neq 0$ の場合の形. 例えば $ab \neq 0, c = 0$ なら, $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, z = z_0$ となる.)

- (2) 点 $\mathbf{x}_0$ を通り, $\mathbf{a}$ を**法線ベクトル**とする平面 ($\mathbf{a}$ に垂直な平面) の方程式は,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0, \text{ すなわち } a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

(右の表現は通常 $ax + by + cz + d = 0$ または $ax + by + cz = d$ の形に整理する.)



演習問題 a (内積・外積, 空間の直線と平面)

a1 (1) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \|\mathbf{u}\|, \|\mathbf{v}\|, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ のなす角, $\mathbf{v}$ の $\mathbf{u}$ への正射影を求めよ.
更に, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ の作る平行四辺形の面積を求めよ.

(2) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ のとき, $\mathbf{b}$ の「 $\mathbf{a}$ に平行な直線」への正射影 $\mathbf{b}_1$ と, $\mathbf{b}$ の「 $\mathbf{a}$ に垂直な平面」への正射影 $\mathbf{b}_2$ に対し, $\|\mathbf{b}_1\|$ と $\|\mathbf{b}_2\|$ を $\|\mathbf{a}\|, \|\mathbf{b}\|, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ を用いて表せ (要点 A (2) の説明も見よ).

(3) $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]$ ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$) に余因子展開を適用して $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ を示せ. 更に, この関係式を用いて, 次を示せ: ① $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$, ② $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が 1 次独立ならば $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a} \times \mathbf{b}] > 0$ (すなわち $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ が右手系).

(4) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, 3 次直交行列 Q ($\stackrel{\text{def}}{=} {}^tQQ = Q{}^tQ = E$) に対して, $Q\mathbf{a} \cdot Q\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (従って $\|Q\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$) 及び $Q\mathbf{a} \times Q\mathbf{b} = \pm Q(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ ($\pm$ は $\det Q \in \{\pm 1\}$ の符号を表す) を示せ.

a2 $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とする.

(1) 連立 1 次方程式 $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつための $\mathbf{b}$ に対する条件を求めよ.
(ヒント: まず, $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = A\mathbf{x}$ となる行列 A を定めよ.)

(2) $\mathbf{b}$ が (1) の条件を満たすとき, 連立 1 次方程式 $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ を解け.

a3 (1) a1 (2) を利用して次を示せ.

(i) 点 $\mathbf{x}_1$ と要点 C (1) の直線の距離 (垂線の長さ) は $\frac{\|\mathbf{a} \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{a}\|}$ で与えられる.

(ii) 点 $\mathbf{x}_1$ と要点 C (2) の平面 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ との距離 (垂線の長さ) は $\frac{|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{a}\|}$ で与えら

れる. 平面が $ax + by + cz + d = 0$ の形なら $\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ (重要) となる.

(2) A(1, 1, -1), B(2, -2, 2), C(3, -1, 0), D(-1, 3, 3) とする.

(i) 直線 AB (2 点 A, B を通る直線) の方程式を求めよ.

(ii) 平面 ABC (3 点 A, B, C を通る平面) の方程式を求めよ. (まず法線ベクトル $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ を求めよ.)
また, 点 D とこの平面の距離を求めよ.

(iii) 点 A を通る平面 ABC の法線 (ℓ とする) の方程式を求めよ. また, 点 D と直線 ℓ の距離を求めよ.

【注】(ii), (iii) の距離は, それぞれ点 D から平面 ABC, 直線 ℓ に下ろした垂線の長さに他ならない. この点に注目すれば (1) を利用しなくても計算できる (まず “垂線の足” の座標を求める).

(3) 直線 $\ell: \frac{x-4}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-4}$ と平面 $\alpha: 5x - 4y - 3z = 5$ について考える.

- (i) 直線 ℓ と平面 α の交点 x_0 を求めよ.
- (ii) 直線 ℓ を平面 α 上に正射影して得られる直線 m (x_0 を通り, “ ℓ の方向ベクトルの平面 α への正射影” を方向ベクトルとする直線) の方程式を求めよ.
- (iii) 直線 ℓ と平面 α のなす角 (= 2 直線 ℓ, m のなす角) を求めよ.
- (iv) 2 直線 ℓ, m を含む平面の方程式を求めよ.

(4) 2 直線 $\frac{x+c}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{4}, \frac{x+4}{5} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+1}{3}$ (c は定数) について考える.

- (i) 2 直線のなす角を求めよ.
- (ii) $c = -1$ のとき 2 直線は交わる. 2 直線の交点の座標と 2 直線を含む平面の方程式を求めよ.
- (iii) $c = 14$ のとき 2 直線はねじれの位置にある (平行でなく共有点を持たない). 2 直線の共通垂線 (両方と垂直に交わる直線) の方程式を求めよ.

レポート課題

- 答だけでなく, 計算の過程も書いて下さい. (A 4 用紙 1~2 枚にまとめて pdf ファイルに変換して提出)
- 授業に出席し, レポートを授業翌日までに WebClass に提出して「出席」となります.

I $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ とする.

- (1) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ と直交し, 大きさが 1 であるベクトル $\mathbf{c}$ をすべて求めよ. また, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が作る平行四辺形の面積 S を求めよ.
- (2) $\mathbf{a}$ の, $\mathbf{b}$ に平行な直線への正射影 $\mathbf{a}'$ を求めよ.

II 平面 $\alpha: 5x - 2y + z = 3$ と点 $P(-2, 2, -3)$ について考える.

- (1) P を通り, 平面 α と垂直な直線 ℓ の方程式を求めよ.
- (2) 直線 ℓ と平面 α の交点を求めよ.

III 連立 1 次方程式を解くことにより, 3 平面

$$\alpha_1: x + 3y + 4z = 5, \quad \alpha_2: x - y - 5z = 1, \quad \alpha_3: 2x + 5y + 6z = 9$$

の交点を求めよ.

演習問題 b (連立 1 次方程式, 行列式の復習) —自習用—

b1 次の連立 1 次方程式に対して, 拡大係数行列を簡約化することにより解を求めよ.

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -1 \\ 5x_1 + 10x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -3 \end{cases}$$

b2 次の連立 1 次方程式が解を持つための a の条件を求めよ. また, そのときの解を求めよ.

$$(1) \begin{cases} ax_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + (a+1)x_2 = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 5x_1 + 17x_2 - 13x_3 = 2 \\ 4x_1 + 14x_2 - 12x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = a \end{cases}$$

b3 次の同次連立 1 次方程式が非自明な解を持つための a の条件を求めよ. また, そのときの解を求めよ.
(ヒント: (2) は係数行列の行列式を考えよ)

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - (a-6)x_3 = 0 \\ 6x_1 + (a+3)x_2 + 6x_3 = 0 \\ ax_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

b4 次の行列の階数を求めよ. また正則な場合には逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 9 \\ 3 & 14 & 14 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

b5 次の行列式の値を求めよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & -9 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix}$$

b6 連立 1 次方程式 $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \\ a^3x + b^3y + c^3z = d^3 \end{cases}$ (a, b, c, d は定数) について, 次の問いに答えよ.

(1) 係数行列の行列式を計算し, 係数行列が正則となるための a, b, c の条件を求めよ.

(2) a, b, c が (1) で求めた条件を満たすとき, Cramer の公式を用いてこの連立 1 次方程式を解け.