数学演習第二（演習第１回）【解答例】

線形：前期線形の復習 (空間の直線と平面，内積・外積を含む)　2024 年 10 月 2 日

演習問題 a

a1 (1) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=3,\ \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\3\\3\end{bmatrix},\ \|\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{6}$. $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ のなす角 $\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ は，$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}=\dfrac{1}{2}$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$. また，$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ への正射影は $\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$. 更に，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ の作る平行四辺形の面積は $\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|=3\sqrt{3}$. ($\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\sin\theta$ を計算してもよい.)

(2) $\boldsymbol{b}_1=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$ より，$\|\boldsymbol{b}_1\|=\dfrac{|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}|}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\|\boldsymbol{a}\|=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|}$. また，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{0}$ だから，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2$. よって，$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2\|=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}_2\|$ (最後の等式で $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}_2$ を用いた). したがって，$\|\boldsymbol{b}_2\|=\dfrac{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$.
また，$\|\boldsymbol{b}_2\|=\sqrt{\|\boldsymbol{b}\|^2-\|\boldsymbol{b}_1\|^2}=\dfrac{\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ と書くこともできる.

(3) $\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\,]=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ を第 1 列に関して余因子展開し，外積の定義を用いて，

$$\begin{aligned}\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\,]&=a_1\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_3&c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix}\\&=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

また，$\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\,]$ を第 3 列に関して余因子展開すれば，同様な計算により $\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\,]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ となり，

$$\boxed{\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\,]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}$$

が得られる. (第二の等号については，行列式の性質を用いて

$$\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\,]=-\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{b}\,]=\det[\,\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\,]=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

と考えてもよい.) 上の関係式より，① $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\,]=0,\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{b}\,]=0$ (同じ列を含む行列式の値は 0). ② $\det[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2\geqslant 0$. あとは $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が 1 次独立のとき $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ を示す必要があるが，図形的に考えて $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=$ ($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積) より，これは明らか.

(4) 一般に $P\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot{}^{\mathrm{t}}P\boldsymbol{b}$ が成り立つ. これを用いて，$Q\boldsymbol{a}\cdot Q\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot{}^{\mathrm{t}}QQ\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 更に，$\forall\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ に対して，

$$(Q\boldsymbol{a}\times Q\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\det[Q\boldsymbol{a}\ \ Q\boldsymbol{b}\ \ Q{}^{\mathrm{t}}Q\boldsymbol{c}]=(\det Q)\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ {}^{\mathrm{t}}Q\boldsymbol{c}]=\pm(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot{}^{\mathrm{t}}Q\boldsymbol{c}=\pm Q(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

であるから，$Q\boldsymbol{a}\times Q\boldsymbol{b}=\pm Q(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ が従う.

a2 (1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3z-y\\x-2z\\2y-3x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&3\\1&0&-2\\-3&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ より，$A=\begin{bmatrix}0&-1&3\\1&0&-2\\-3&2&0\end{bmatrix}$ とおけば，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と書ける. ここで，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもつための条件を調べるために，$[A\quad\boldsymbol{b}]$ に行基本変形を施す:

$$[A\quad\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}0&-1&3&b_1\\1&0&-2&b_2\\-3&2&0&b_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-2&b_2\\0&-1&3&b_1\\0&2&-6&3b_2+b_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-2&b_2\\0&1&-3&-b_1\\0&0&0&2b_1+3b_2+b_3\end{bmatrix}.$$

よって，解をもつための条件は $2b_1+3b_2+b_3=0$ (すなわち，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$).

(2) (1) の条件が満たされるとき，

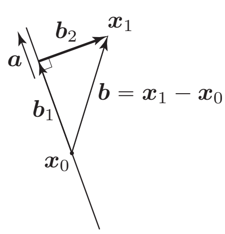
$$[A\quad\boldsymbol{b}]\to\begin{bmatrix}1&0&-2&b_2\\0&1&-3&-b_1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

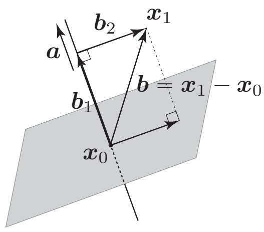
となるから，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は $\begin{cases}x-2z=b_2\\y-3z=-b_1\end{cases}$ と同値. よって，$z=t$ とおくと，

解は，$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_2\\-b_1\\0\end{bmatrix}+\underbrace{t\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}\text{ に平行}}$ (t は任意定数).

$\boxed{\text{a3}}$ (1) (i) 点 $\boldsymbol{x}_1$ と $\boxed{\text{c}}$ (1) の直線との距離は $\boxed{\text{a1}}$ (2) で $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$ と考えたときの $\|\boldsymbol{b}_2\|$ に等しい (下左図). よって, 求める距離は $\dfrac{\|\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$. (“垂線の足” は $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$.)

(ii) 点 $\boldsymbol{x}_1$ と $\boxed{\text{c}}$ (2) の平面との距離は $\boxed{\text{a1}}$ (2) で $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$ と考えたときの $\|\boldsymbol{b}_1\|$ に等しい (下右図). よって, 求める距離は $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|}$. (“垂線の足” は $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{x}_1 - \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$.) 平面が $ax+by+cz+d=0$ と表されるなら $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_0 + d = 0$ であるから, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_1 + d$ となり, 距離は $\dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ と表される.





(2) (i) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{bmatrix}1\\-3\\3\end{bmatrix}$ が直線 AB の方向ベクトルを与えるので, 直線 AB の方程式は $x - 1 = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+1}{3}$.

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{bmatrix}1\\-3\\3\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix}$ が平面 ABC の法線ベクトルだから, 平面 ABC の方程式は

$$3(x-1) + 5(y-1) + 4(z+1) = 0. \quad \text{これを整理して,}\ \ 3x + 5y + 4z = 4.$$

次に, (1) の (ii) を利用するために, $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ (A の位置ベクトル), $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix}-1\\3\\3\end{bmatrix}$ (D の位置ベクトル), $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix}$ (平面 ABC の法線ベクトル) とおけば, 点 D と平面 ABC の距離は $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|} = \dfrac{20}{\sqrt{50}} = 2\sqrt{2}$.

(iii) (ii) と同じ意味で $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{a}$ を用いる. 直線 ℓ は点 A を通り, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから, その方程式は $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z+1}{4}$. また, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-2\\2\\4\end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix}3\\-5\\4\end{bmatrix}$ より, (1) の (i) を用いて, 点 D とこの直線の距離は $\dfrac{\|\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|} = \dfrac{4\sqrt{50}}{\sqrt{50}} = 4$.

【注】(ii), (iii) の距離は D から平面, 直線に下ろした垂線の長さである. (ii) では D から平面 ABC に垂線 DE を下ろせば, $\mathrm{E}(-1+3t, 3+5t, 3+4t)$ が $3x+5y+4z=4$ 上にあるから $t = -\frac{2}{5}$ となり, $\|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\| = 2\sqrt{2}$. (iii) では D から “A を通る平面 ABC の法線” に垂線 DF を下ろせば, $\mathrm{F}(1+3u, 1+5u, -1+4u)$ が $\overrightarrow{\mathrm{DF}} \perp \boldsymbol{a}$ を満たすから $u = \frac{2}{5}$ となり, $\|\overrightarrow{\mathrm{DF}}\| = 4$.

(3) (i) 直線 ℓ 上の点 $(5t+4,\ 3t-1,\ -4t-2)$ を平面 α の方程式 $5x - 4y - 3z = 5$ に代入して, $5(5t+4) - 4(3t-1) - 3(-4t-2) = 5$ となり, $t = -1$. よって, 交点 $\boldsymbol{x}_0$ の座標は $(-1, -4, 2)$.

(ii) α の法線ベクトルが $\boldsymbol{a} := \begin{bmatrix}5\\-4\\-3\end{bmatrix}$, ℓ の方向ベクトルが $\boldsymbol{b} := \begin{bmatrix}5\\3\\-4\end{bmatrix}$ より, $\boldsymbol{b}$ の平面 α への正射影は $\boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}5\\3\\-4\end{bmatrix} - \dfrac{25}{50}\begin{bmatrix}5\\-4\\-3\end{bmatrix} = \dfrac{5}{2}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} /\!/ \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$. よって, 直線 m の方程式は $x + 1 = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

(iii) $\boldsymbol{c} := \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$ が直線 m の方向ベクトルであるから, 直線 ℓ, m のなす角を $\theta\ (0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$ とすれば,

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|}{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|} = \frac{|5+6+4|}{\sqrt{50}\sqrt{6}} = \frac{15}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \therefore\ \theta = \frac{\pi}{6}. \qquad \left(\text{このとき, } \sin\theta = \frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\right)$$

【注】一般に, 2 直線の方向ベクトルが $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ であるとき, この 2 直線のなす角 θ $(\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}})$ は「$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ のなす角」または「$\boldsymbol{b}, -\boldsymbol{c}$ のなす角」のいずれかで与えられる. 従って, $\cos\theta = \dfrac{|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|}{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|}$ が成り立つ.

(iv) 求める平面は $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}5\\3\\-4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\\7\end{bmatrix}$ を法線ベクトルとする. よって, 方程式は

$$5(x+1)+(y+4)+7(z-2)=0, \quad \text{すなわち} \quad 5x+y+7z=5.$$

(4) 2 直線の方向ベクトルは $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}5\\-4\\3\end{bmatrix}$. また, 2 直線上の点は $(5s-c,\ 3s+1,\ 4s+2)$, $(5t-4,\ -4t+5,\ 3t-1)$ とおけることに注意する.

(i) 2 直線のなす角を θ $(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$ とすれば, $\cos\theta = \dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \dfrac{25}{5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$. $\therefore\ \theta = \dfrac{\pi}{3}$.

(ii) $c=-1$ のとき, $(5s+1, 3s+1, 4s+2) = (5t-4, -4t+5, 3t-1) \Leftrightarrow (s,t)=(0,1)$ より, 2 直線は $(1,1,2)$ で交わる. よって, 2 直線を含む平面は点 $(1,1,2)$ を通り, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}25\\5\\-35\end{bmatrix} /\!/ \begin{bmatrix}5\\1\\-7\end{bmatrix}$ を法線ベクトルとするから, その方程式は $5(x-1)+(y-1)-7(z-2)=0$. $\therefore\ 5x+y-7z+8=0$.

(iii) $c=14$ のとき, 与えられた 2 直線と求める直線 (共通垂線) の交点は

$$\mathrm{A}(5s-14,\ 3s+1,\ 4s+2), \quad \mathrm{B}(5t-4,\ -4t+5,\ 3t-1)$$

とおける. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の両方と垂直であるから, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} /\!/ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. よって, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{bmatrix}-5s+5t+10\\-3s-4t+4\\-4s+3t-3\end{bmatrix} = k\begin{bmatrix}5\\1\\-7\end{bmatrix}$ を満たす k が存在する. これより, $s=1,\ t=0,\ k=1$. よって, $\mathrm{B}(-4,5,-1)$ となるから, 求める直線の方程式は $\dfrac{x+4}{5} = y-5 = \dfrac{z+1}{-7}$.

レポート課題

I (1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\5\\5\end{bmatrix} /\!/ \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ より, $\boldsymbol{c} = \boxed{\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}}$. $S = \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \boxed{5\sqrt{3}}$.

(2) $\boldsymbol{a}' = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b} = \dfrac{3}{6}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}1/2\\1\\-1/2\end{bmatrix}}$.

II (1) 直線 ℓ の方向ベクトルは, 平面 α の法線ベクトル $\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}$ で与えられる. ℓ は点 $\mathrm{P}(-2,2,-3)$ を通るから, 直線 ℓ の方程式は $\boxed{\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-2}{-2} = z+3}$.

(2) (1) より, 直線 ℓ 上の点は, 実数 t を用いて $\begin{bmatrix}5t-2\\-2t+2\\t-3\end{bmatrix}$ と表される. これを平面 α の方程式に代入して, $5(5t-2)-2(-2t+2)+t-3=3$. よって, $t=\dfrac{2}{3}$ となるので, 求める交点は $\boxed{\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}4\\2\\-7\end{bmatrix}}$.

III 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+3y+4z=5 \\ x-y-5z=1 \\ 2x+5y+6z=9 \end{cases}$ の拡大係数行列を簡約化すると,

$$\begin{bmatrix}1&3&4&5\\1&-1&-5&1\\2&5&6&9\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&3&4&5\\0&-4&-9&-4\\0&-1&-2&-1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&3&4&5\\0&1&2&1\\0&4&9&4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&-2&2\\0&1&2&1\\0&0&1&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

となるので, 交点は $\boxed{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}}$.

演習問題 b

b1 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 10 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -10 \\ 2 & 5 & -4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & 9 & -10 & 25 \\ 0 & 10 & -7 & 36 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & 10 & -7 & 36 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -37 & -74 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & 10 & 6 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -14 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b2 (1) 係数行列の行列式は $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & a+1 \end{vmatrix} = a^2 + a - 6 = (a+3)(a-2)$. よって,

- $a \neq -3, 2$ ならば, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & a+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{(a+3)(a-2)} \begin{bmatrix} a+1 & -2 \\ -3 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{a-2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- $a = -3$ ならば, $3x_1 - 2x_2 = 1$ となり, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
- $a = 2$ ならば解なし.

解をもつ条件は $a \neq 2$.

(2) $\begin{bmatrix} 5 & 17 & -13 & 2 \\ 4 & 14 & -12 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 14 & -12 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & a-2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 4 & a-2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a-\frac{7}{2} \end{bmatrix}$

より, 解をもつ条件は $a = \dfrac{7}{2}$. このとき, 解は $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b3 (1) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 8 & -7 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 16 & -14 \\ 0 & 4 & a-3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & a-3 \\ 0 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & a-3 \\ 0 & 0 & -2a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 非自明な解をもつ条件は $a = -\dfrac{1}{2}$.

このとき, $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるので, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -10 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -(a-6) \\ 6 & a+3 & 6 \\ a & 3 & 3 \end{vmatrix} = (a-3)^2(a+3)$ より, 非自明な解をもつ条件は $a = \pm 3$. $a = 3$ のとき, (係数行列) $\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

より, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. $a = -3$ のとき, (係数行列) $\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b4 (1) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 14 & 14 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 14 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$ より, 階数は 3 で, 逆行列は $\begin{bmatrix} 0 & 14 & -9 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は $3\ (< 4)$ で, 逆行列は存在しない.

(3) $\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ より, 階数は 4 で, 逆行列は $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b5 (1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 11$. (2) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & -9 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} 2 \begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+3} 6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 12$.

(3) $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (x+3a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x+3a)(x-a)^3$.

(4) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} = \cdots = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$.

b6 (1) $\Delta(a,b,c) := \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b) = \overbrace{abc(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0}^{a,b,c\ \text{は 0 でなく, 互いに異なる}}$.

(2) $x = \dfrac{\Delta(d,b,c)}{\Delta(a,b,c)} = \dfrac{dbc(d-b)(b-c)(c-d)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)} = \dfrac{d(d-b)(c-d)}{a(a-b)(c-a)}$, $y = \dfrac{d(a-d)(d-c)}{b(a-b)(b-c)}$, $z = \dfrac{d(b-d)(d-a)}{c(b-c)(c-a)}$.