数学演習第二（演習第２回）【解答例】

微積：前期微積の復習（広義積分を含む）　2024 年 10 月 9 日

演習問題 a

$\boxed{\text{a1}}$ $\dfrac{1}{x^s}$ $(x>0)$ の不定積分 (積分定数省略) は

$$0<s\neq 1 \text{ のとき } \int \frac{dx}{x^s}=\int x^{-s}\,dx=\frac{x^{1-s}}{1-s},\quad s=1 \text{ のとき } \int \frac{dx}{x}=\log x.$$

これを用いて,

(1) $0<s\neq 1$ のとき $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^s}=\Big[\frac{x^{1-s}}{1-s}\Big]_{+0}^{1}=\begin{cases}\frac{1}{1-s} & (s<1)\\ \infty & (s>1)\end{cases}$, $\quad s=1$ のとき $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x}=\big[\log x\big]_{+0}^1=\infty.$

(2) $0<s\neq 1$ のとき $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}=\Big[\frac{x^{1-s}}{1-s}\Big]_{1}^{\infty}=\begin{cases}\frac{1}{s-1} & (s>1)\\ \infty & (s<1)\end{cases}$, $\quad s=1$ のとき $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{x}=\big[\log x\big]_{1}^\infty=\infty.$

$\boxed{\text{a2}}$ (1) $\displaystyle\int_0^1\frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}}\,dx=\Big[2\sqrt{x}\,(\log x)^2\Big]_{+0}^1-4\int_0^1\frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx=-4\Big[2\sqrt{x}\,\log x\Big]_{+0}^1+8\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=8\Big[2\sqrt{x}\Big]_{+0}^1=16.$

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac12\right)^2-\left(x-\frac12\right)^2}}=\Bigg[\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x-\frac12}{\frac12}\Bigg]_{+0}^{1-0}=\Big[\mathrm{Sin}^{-1}(2x-1)\Big]_{+0}^{1-0}=\frac{\pi}{2}-\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)=\pi.$

(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac12\right)^2-\frac14}}=\Big[\log\Big(x+\frac12+\sqrt{x(1+x)}\Big)\Big]_{+0}^1=\log\frac{\frac32+\sqrt2}{\frac12}=2\log(1+\sqrt2\,).$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\int\frac{dx}{\left(x-\frac12\right)^2+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt3}{2}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x-\frac12}{\frac{\sqrt3}{2}}=\frac{2}{\sqrt3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt3}$ より,

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^2-x+1}=\Big[\frac{2}{\sqrt3}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt3}\Big]_0^\infty=\frac{2}{\sqrt3}\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\Big)=\frac{4\pi}{3\sqrt3}.$$

(5) $\displaystyle\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$ より,

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+5x+6}=\int_0^\infty\Big(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\Big)\,dx=\Big[\log\frac{x+2}{x+3}\Big]_0^\infty=\log\frac32.$$

(6) 部分積分を繰り返して,

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx=\Big[-e^{-x}\sin x\Big]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx=\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$$
$$=\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^\infty-\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx=1-\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx.$$

よって, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx\ \Big(=\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx\Big)=\frac12.$

(7) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\,dx=\Big[-\frac1x\log(1+x^2)\Big]_{+0}^\infty+\int_0^\infty\frac1x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx=\Big[2\,\mathrm{Tan}^{-1}x\Big]_0^\infty=\pi.$

(8) $\displaystyle\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{(\cosh x)'}{\cosh x}$ より,

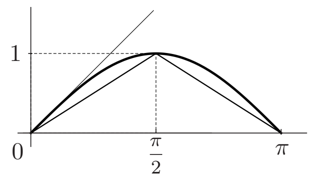
$$\int_0^\infty(1-\tanh x)\,dx=\Big[x-\log(\cosh x)\Big]_0^\infty=\Big[\log\frac{e^x}{\cosh x}\Big]_0^\infty=\Big[\log\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}\Big]_0^\infty=\log 2.$$

(9) $\displaystyle\frac{1}{\sinh x}=\frac{\sinh x}{\cosh^2 x-1}=\Big(\frac{1}{\cosh x-1}-\frac{1}{\cosh x+1}\Big)(\cosh x)'$ であるから, $t=\cosh x$ とおいて,

$$\int_{\log 3}^\infty\frac{dx}{\sinh x}=\frac12\int_{\cosh(\log 3)}^\infty\Big(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\Big)\,dt=\frac12\Big[\log\frac{t-1}{t+1}\Big]_{\frac53}^\infty=-\frac12\log\frac{5-3}{5+3}=\log 2.$$

ここで, $\cosh(\log 3)=\dfrac{3+3^{-1}}{2}=\dfrac53$ を用いた．本質的に同じだが, $\displaystyle\int_{\log 3}^\infty\frac{dx}{\sinh x}=\frac12\Big[\log\frac{\cosh x-1}{\cosh x+1}\Big]_{\log 3}^\infty=$ $\log 2$ と計算してもよい.

a3 (1) まず, 区間 $(0,\pi)$ 上の正値連続関数 $\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ に関して対称であるから, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ が収束することを示せば十分. 次に, $0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ において $y=\sin x$ は上に凸ゆえ $0<\dfrac{2x}{\pi}\leqslant\sin x\ (\leqslant x)$ (右図参照), 従って $0<\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}\leqslant\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.



ここで, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,dx\overset{\frac{2x}{\pi}=y}{=}\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{y}}=\pi<\infty$ より $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ は収束する.

《別法》 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$ であるから, 区間 $(0,a]$ ($a>0$: 十分小) において $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ が成り立つ. よって, $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2<\infty$ から $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ が収束することが分かる (収束性が問題になるのは $x=0$ の近くのみ).

(2) $0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ において, $\sin x\geqslant\dfrac{2x}{\pi}>0$ より $|\log(\sin x)|=-\log(\sin x)\leqslant-\log\dfrac{2x}{\pi}$ ($-\log x$ は単調減少関数). ここで,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\log\frac{2x}{\pi}\right)dx\overset{\frac{2x}{\pi}=y}{=}-\frac{\pi}{2}\int_0^1\log y\,dy=\frac{\pi}{2}<\infty$$

であるから, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,dx$ は収束する. (値は $-\dfrac{\pi}{2}\log 2$ となることが知られている.)

《別法》 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\,\log(\sin x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log(\sin x)}{x^{-1/2}}\overset{\text{ロピタル}}{=}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}=-2\lim_{x\to+0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\sqrt{x}\,\cos x\right)=0$ であるから, 区間 $(0,a]$ ($a>0$: 十分小) において $|\log(\sin x)|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ が成り立つ. よって, $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2<\infty$ から $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,dx$ が収束することが分かる (収束性が問題になるのは $x=0$ の近くのみ).

(3) $0<x\leqslant1$ において $\left|\dfrac{\log x}{1+x^2}\right|\leqslant|\log x|$ で, $\displaystyle\int_0^1|\log x|\,dx=-\int_0^1\log x\,dx=1<\infty$ であるから $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ は収束する. 次に, $x\geqslant1$ において, $0\leqslant\dfrac{\log x}{1+x^2}=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\leqslant\dfrac{C}{x^{3/2}}$ ($\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}=0$ より, $x\geqslant1$ において $0\leqslant\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}\leqslant{}^{\exists}C<\infty$) であり, $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{x^{3/2}}=2<\infty$ であるから $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ も収束する. よって,

$$\int_0^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\,dx=\int_0^1\frac{\log x}{1+x^2}\,dx+\int_1^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\,dx$$

は収束する. (実は, $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\,dx\overset{\frac{1}{x}=y}{=}\int_1^0\frac{\log\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y^2}}\left(-\frac{dy}{y^2}\right)=-\int_0^1\frac{\log y}{y^2+1}\,dy=-\int_0^1\frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ であるから, $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\log x}{1+x^2}\,dx=0$ と分かる.)

レポート課題

I (1) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx=\Big[2\sqrt{x}\,\log x\Big]_{+0}^1-2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=-2\Big[2\sqrt{x}\Big]_{+0}^1=-4.$

(2) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{x(x^2+1)}=\int_1^\infty\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\left[\log x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_1^\infty=\left[\frac{1}{2}\log\frac{x^2}{x^2+1}\right]_1^\infty=\frac{1}{2}\log 2.$

(3) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ $(0\leqslant x<\pi)$ とおけば, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2\,dt}{1+t^2}$ より,

$$\int_0^\pi\frac{dx}{2+\cos x}=\int_0^\infty\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2\,dt}{1+t^2}=2\int_0^\infty\frac{dt}{3+t^2}=2\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_0^\infty=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

《注》通常の定積分だが, 置換積分すると広義積分になる.

II $0<x\leqslant1$ において, $0<\dfrac{x^{a-1}}{1+x}\leqslant x^{a-1}=\dfrac{1}{x^{1-a}}$ であり, $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^{1-a}}=\frac{1}{a}<\infty$ であるから $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}$ は収束する. 次に, $1\leqslant x<\infty$ において, $0<\dfrac{x^{a-1}}{1+x}\leqslant\dfrac{x^{a-1}}{x}=\dfrac{1}{x^{2-a}}$ であり, $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{x^{2-a}}=\frac{1}{1-a}<\infty$ であるから $\displaystyle\int_1^\infty\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$

も収束する．よって，

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$$

は収束する．(値は $\dfrac{\pi}{\sin \pi a}$ となることが知られている.)

演習問題 b

b1 (1) $\sin\dfrac{10\pi}{9} = \sin\left(\pi - \dfrac{10\pi}{9}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{9}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{9}\right) = \cos\dfrac{11\pi}{18}$ かつ $0 < \dfrac{11\pi}{18} < \pi$ であるから，$\mathrm{Cos}^{-1}\left(\sin\dfrac{10\pi}{9}\right) = \dfrac{11\pi}{18}$.

(2) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}(-2)$ とおけば $\tan\alpha = -2$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$. このとき，$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{5}$. $\cos\alpha > 0$ より $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(3) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2}$, $\beta = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{7}$ とおけば，$0 < \dfrac{1}{7} < \dfrac{1}{2} < 1$ より $0 < \beta < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ となり，$0 < 2\alpha - \beta < \dfrac{\pi}{2}$. 一方，$\tan 2\alpha = \dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2} = \dfrac{4}{3}$, $\tan\beta = \dfrac{1}{7}$ より，$\tan(2\alpha-\beta) = \dfrac{\tan 2\alpha - \tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta} = 1$. よって，$2\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4}$.

b2 (1) $f'(x) = \dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{x^4+2x^2+2}$.

(2) $\log|x^3-3x+2| = 2\log|x-1| + \log|x+2|$ より，$n \geqslant 1$ に対して，

$$f^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n} + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+2)^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\left\{\frac{2}{(x-1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n}\right\}.$$

(3) ライプニッツの公式を用いて，

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= x^2\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\pi\right) + 2nx\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right) + n(n-1)\sin\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right) \\ &= \{x^2 - n(n-1)\}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - 2nx\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

b3 いずれも $x \to 0$ で考える．

(1) $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{24}x^4 + o(x^4)$, $\log(1+2x) = 2x - 2x^2 + \dfrac{8}{3}x^3 - 4x^4 + o(x^4)$ より，$e^{-x}\log(1+2x) = 2x - 4x^2 + \dfrac{17}{3}x^3 - 8x^4 + o(x^4)$.

(2) $e^{\cos x} = e^{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)} = e\left\{1 + \left(-\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{24}x^4\right) + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)^2 + o(x^4)\right\} = e\left\{1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^4 + o(x^4)\right\}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{8}x^4 + o(x^4)$ より，$\dfrac{e^{\cos x}}{\sqrt{1-x^2}} = e + \dfrac{7e}{24}x^4 + o(x^4)$.

(3) $\{\log(\sqrt{1+x^2} - x)\}' = -\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -1 + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ を積分して，$\log(\sqrt{1+x^2} - x) = -x + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)$.

b4 (1) ロピタルの定理を用いて，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{e^{3x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+2x}}{3e^{3x}} = \frac{2}{3}$.

(2) $x \to 0$ のとき，$\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ を積分して，$\mathrm{Tan}^{-1}x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, $\mathrm{Sin}^{-1}x = x + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$. よって，$\dfrac{\mathrm{Tan}^{-1}x - x}{\mathrm{Sin}^{-1}x - x} = \dfrac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} \to -2$. ロピタルの定理を用いてもよい．

(3) $x \to 0$ のとき，$(e^{x^2} - 1 - x^2)\tan x = \left(\dfrac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right)(x + o(x)) = \dfrac{1}{2}x^5 + o(x^5)$, $6\sin x - 6x + x^3 = 6\left(x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) - 6x + x^3 = \dfrac{1}{20}x^5 + o(x^5)$ より，$\dfrac{6\sin x - 6x + x^3}{(e^{x^2}-1-x^2)\tan x} = \dfrac{\frac{1}{20}x^5 + o(x^5)}{\frac{1}{2}x^5 + o(x^5)} \to \dfrac{1}{10}$.

(4) $\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x)^x = x\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x)$ において，$x \to \infty$ のとき $\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x) \to \log\dfrac{\pi a}{2} \lesseqqgtr 0$ $\left(a \lesseqqgtr \dfrac{2}{\pi}\right)$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x) = -\infty$ $(0 < a < \frac{2}{\pi})$, $= \infty$ $(a > \frac{2}{\pi})$. $a = \frac{2}{\pi}$ のときは不定形であり，ロピタルの定理により，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\log\left(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Tan}^{-1}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(\mathrm{Tan}^{-1}x) + \log\frac{2}{\pi}}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\mathrm{Tan}^{-1}x}\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{\pi}$. よって求める

極限値は $e^{-\frac{2}{\pi}}$.

(5) $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ より $\dfrac{\tan x}{x} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$. これと $\log(1+x) = x + o(x)$ とから, $\log\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{\log(1+\frac{1}{3}x^2+o(x^2))}{x^2} = \dfrac{\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}{x^2} \to \dfrac{1}{3}$. よって, 求める極限値は $e^{1/3}$.

$\boxed{\text{b5}}$ (1) e^x を有限マクローリン展開すると, $\mathbb{R}$ 上で,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x), \quad R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (0 < {}^\exists\theta = \theta(x) < 1).$$

$x \geqslant 0$ においては $R_{n+1}(x) \geqslant 0$ であるから, $e^x \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ が成り立つ.

(2) $\log(1+x)$ を有限マクローリン展開すると, $x > -1$ のとき,

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_{2n+1}(x), \quad R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\theta x)^{2n+1}} \quad (0 < {}^\exists\theta = \theta(x) < 1).$$

$x \geqslant 0$ においては

$$0 \leqslant R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\theta x)^{2n+1}} \leqslant \frac{(-1)^{(2n+1)-1}}{2n+1} x^{2n+1}$$

であるから, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \leqslant \log(1+x) \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ が成り立つ.

$\boxed{\text{b6}}$ (1) $\displaystyle\int x \operatorname{Sin}^{-1} x\,dx = \frac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{Sin}^{-1} x - \frac{1}{2}\int (x^2-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{Sin}^{-1} x + \frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\,dx$,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= x\sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{(1-x^2)-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{Sin}^{-1} x - \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{Sin}^{-1} x\right)\end{aligned}$$

であるから,

$$\int x \operatorname{Sin}^{-1} x\,dx = \frac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{Sin}^{-1} x + \frac{1}{4}\left(x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{Sin}^{-1} x\right) = \frac{1}{4}(2x^2-1)\operatorname{Sin}^{-1} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}.$$

《別法》$\theta = \operatorname{Sin}^{-1} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ とおけば, $x = \sin\theta$, $dx = \cos\theta\,d\theta$ であり,

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{Sin}^{-1} x\,dx &= \int \theta \sin\theta \cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int \theta \sin 2\theta\,d\theta = -\frac{1}{4}\theta\cos 2\theta + \frac{1}{4}\int \cos 2\theta\,d\theta \\ &= -\frac{1}{4}\theta\cos 2\theta + \frac{1}{8}\sin 2\theta = -\frac{1}{4}\theta(1-2\sin^2\theta) + \frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta \\ &= \frac{1}{4}(2x^2-1)\operatorname{Sin}^{-1} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

(2) 定積分は (広義積分の意味でも) 存在しない. 実際,

$$\int_0^1 \frac{6x+1}{3x^2+x-2}\,dx = \int_0^1 \frac{(3x^2+x-2)'}{3x^2+x-2}\,dx = \Big[\log|(3x-2)(x+1)|\Big]_0^1 = \log 1 = 0$$

と計算したくなるところだが, 被積分関数は区間 $[0,1]$ 上の点 $x = 2/3$ で不連続かつその点の近傍で非有界であるから, 次のように積分区間を分割して広義積分の意味で解釈して,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{6x+1}{3x^2+x-2}\,dx &= \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{6x+1}{3x^2+x-2}\,dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{6x+1}{3x^2+x-2}\,dx \\ &= \Big[\log\{(2-3x)(x+1)\}\Big]_0^{\frac{2}{3}-0} + \Big[\log\{(3x-2)(x+1)\}\Big]_{\frac{2}{3}+0}^1 = (-\infty) + \infty \ \text{(不定)}.\end{aligned}$$

(3) $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくと, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$ より,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+2\cos x} &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2\,dt}{3-t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}-t} + \frac{1}{\sqrt{3}+t}\right)dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\log\frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\log 2}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$