数学演習第二 （演習第3回）

線形：ベクトル空間・部分空間

2024 年 10 月 23 日

【要点】

ベクトル空間 V (線形教科書 p.102–103) の空でない部分集合 W が (V の和・スカラー倍に関して) ベクトル空間の性質を満たすとき, W は V の**部分空間**であるという.

〈部分空間の条件〉 (線形教科書 p.105)

ベクトル空間 V の部分集合 W が V の部分空間であるための必要十分条件は次の 3 条件すべてを満たすことである :

$$\text{(i)}\ \ \mathbf{0} \in W. \qquad \text{(ii)}\ \ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \ \Rightarrow\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in W. \qquad \text{(iii)}\ \ \boldsymbol{a} \in W,\, k \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ k\boldsymbol{a} \in W.$$

［注］(ii), (iii) の下で (i) は $W \neq \emptyset$ と同値である. (i) は単純な条件であるが, W が部分空間であるかどうかの判断の第一歩となる.

〈生成される部分空間に含まれる条件〉 (線形教科書 p.108–110)

ベクトル空間 V において, $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r \in V$ の 1 次結合全体の集合

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r \rangle = \{c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r \mid c_1, \dots\ c_r \in \mathbb{R}\}$$

は部分空間となる. これを $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ によって**生成される部分空間**という.

数ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^m$ の元 $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}$ に対して,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r \rangle \quad &\Leftrightarrow \quad c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{b} \text{ と表せる } (\boldsymbol{b} \text{ は } \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r \text{ の 1 次結合}). \\
&\Leftrightarrow \quad \text{非同次連立一次方程式 } [\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \text{ が解を持つ.} \\
&\overset{\substack{\text{教科書}\\ \text{定理 8.4}}}{\Leftrightarrow} \quad \operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r] = \operatorname{rank}[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r \mid \boldsymbol{b}].
\end{aligned}$$

なお, $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_s$ が $\langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ に属するかどうかを調べたければ, $[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r \mid \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_s]$ を行基本変形してその階数を同時に調べるのが早い.

［注］$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^m$ をこの順に並べてできる $m \times r$ 行列を $[\boldsymbol{a}_1\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{a}_r]$ または $[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r]$ と表す.

〈２つの部分空間の共通部分と和空間〉 (線形教科書 p.110–111)

ベクトル空間 V の 2 つの部分空間 W_1, W_2 に対し,

$$\begin{aligned}
W_1 \cap W_2 &= \{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{v} \in W_1 \text{ かつ } \boldsymbol{v} \in W_2\} \quad (W_1, W_2 \text{ の\textbf{共通部分}}), \\
W_1 + W_2 &= \{\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \mid \boldsymbol{w}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{w}_2 \in W_2\} \quad (W_1, W_2 \text{ の\textbf{和空間}})
\end{aligned}$$

は, いずれも V の部分空間となる.

演習問題

1 ［部分空間の判定］

次のベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ または $\mathbb{R}^3$ の部分集合 W が部分空間であるかどうかを判定せよ．

(1) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0 \text{ または } y > 0 \right\}$　(2) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x, y \text{ は整数} \right\}$

(3) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 0 \right\}$　(4) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = z^2 \right\}$

(5) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; xyz = 0 \right\}$　(6) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{r} x + 2y + z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ x - 7y + 4z = 0 \end{array} \right\}$

(7) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x + 2y + 2z = 5 \\ x - 4y + 2z = -1 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{array} \right\}$

(8) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \text{連立一次方程式 } \begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ x - 4y + 2z = b \\ x - 3y + 2z = c \end{cases} \text{ が解を持つ} \right\}$

2 ［生成される部分空間］

次のベクトル空間 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ または $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W に対して, 与えられた $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が W に属するか判定せよ．ただし, (3) については $\boldsymbol{v} \in W$ となるための a, b, c の条件を求めよ．

(1) $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

(2) $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

(3) $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

(4) $W = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(5) $W = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\boxed{3}$ ［共通部分と和空間］

(1) $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 3t \\ 2t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

について, W_1, W_2, 共通部分 $W_1 \cap W_2$, 和集合 $W_1 \cup W_2$, 和空間 $W_1 + W_2$ をそれぞれ異なる xy 平面上に図示せよ. また, 和集合 $W_1 \cup W_2$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間でないことを確認せよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

について, $\mathbb{R}^3$ を xyz 座標を用いて表記した場合, W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$, 和空間 $W_1 + W_2$ は $\mathbb{R}^3$ 内のどのような図形になるか. すなわち,
$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_2$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1 + W_2$ となるとき，それぞれの x, y, z の関係を x, y, z の方程式で示し, その方程式が表す図形を答えよ.

レポート課題

［部分空間の判定］ 次のベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 W が部分空間であるかどうかを判定せよ.

(1) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\}$

(2) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1 \right\}$

［生成される部分空間と共通部分］

(3) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle$ とベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ に対して, $\boldsymbol{v} \in W$ となる a を求めよ.

(4) $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

について, W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ は $\mathbb{R}^3$ 内のどのような図形になるか. すなわち,
$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_2$, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1 \cap W_2$ となるとき，それぞれの x, y, z の関係を x, y, z の方程式で示し, その方程式が表す図形を答えよ.